

**Research Paper**

**مقاله پژوهشی**

**Mathematical Analysis of Sub-  
Atmospheric Vapor Pipeline (SAVP)  
Transmission for Seawater Desalination**

**تحلیل ریاضی انتقال خط لوله بخار زیراتمسفری  
در نمک‌زدایی آب دریا**

**Mona Shojaei<sup>1\*</sup> and Mohsen Nosrati<sup>2</sup>**

**منا شجاعی<sup>۱\*</sup> و محسن نصرتی<sup>۲</sup>**

1- Assistant Professor of Research, Faculty Member of Water and Wastewater Research Center, Water Research Institute, Tehran, Iran.

۱- استادیار پژوهشی، عضو هیئت علمی مرکز تحقیقات آب و فاضلاب، موسسه تحقیقات آب، تهران، ایران.

2- Associate Professor, Biochemical Engineering Department, Faculty of Chemical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

۲- دانشیار گروه مهندسی شیمی-بیوتکنولوژی، دانشکده مهندسی شیمی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.

\*Corresponding Author, Email: [m.shojaei@wri.ac.ir](mailto:m.shojaei@wri.ac.ir)

\*نویسنده مسئول، ایمیل: [m.shojaei@wri.ac.ir](mailto:m.shojaei@wri.ac.ir)

Received: 31/12/2024

Revised: 26/01/2025

Accepted: 03/03/2025

© IWWA

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۰/۱۱

تاریخ اصلاح: ۱۴۰۳/۱۱/۰۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۲/۱۳

© انجمن آب و فاضلاب ایران

**Abstract**

**چکیده**

A mathematical analysis of seawater desalination via the Sub-Atmospheric Vapor Pipeline (SAVP) method has been conducted, encompassing both theoretical and practical investigations in a natural field setting. The SAVP process facilitates vapor transfer by utilizing the temperature difference between a warm source and a cold environment. Owing to its demonstrated advantages, this technology holds potential for industrial and field-scale applications. Advancements in SAVP knowledge require studying the phenomenon under dynamic conditions, where the temperatures of the heat source and sink, as well as the thermal conditions along the SAVP path, are inherently functions of time and space. This scenario introduces novel and compelling research challenges. The analysis begins with a review and simplification of the fundamental convection-diffusion equation, leading to a solution for the temperature profile within the pipe using advanced engineering mathematics. A mathematical approach involving Eigen functions is employed to solve the temperature differential equation. The output of this mathematical model was validated in a real-world natural environment, specifically along a 16 km pipeline between a hot source (the city of Ramsar) and a cold source (the Takhte Soleiman heights).

تحلیل ریاضی شیرین‌سازی آب دریا از طریق خط لوله بخار زیراتمسفری معروف به SAVP، که یکی از روش‌های شیرین‌سازی آب دریا است، به صورت تئوری و کاربردی در یک میدان طبیعی، تحلیل شده است. انتقال بخار زیراتمسفری براساس اختلاف دما بین یک منبع گرم و یک محیط سرد اتفاق می‌افتد و به علت مزایای اثبات شده‌ای که دارد، می‌تواند کاربردهایی در ابعاد صنعتی و میدانی داشته باشد. مواردی که برای توسعه دانش SAVP مدنظر است، عبارتند از مطالعه این پدیده در حالت دینامیک که در آن دمای منبع گرم و سرد و شرایط گرمایی مسیر SAVP تحت عواملی قرار می‌گیرند که ذاتاً تابعی از زمان و مکان هستند. در چنین حالتی، بحث‌های جدید و جالبی به وجود می‌آیند که ورود به آن، از مرور و ساده‌سازی معادله اساسی همرفت-نفوذ شروع شده و به حل پروفایل دما در لوله با پشتوانه ریاضیات مهندسی پیشرفته می‌انجامد. رویکردی ریاضی برای حل معادله دیفرانسیل دما به وجود می‌آید که از طریق توابع ویژه قابل حل هستند. نتایج خروجی این تحلیل ریاضی در یک میدان واقعی و طبیعی در حد فاصل ۱۶ کیلومتری یک منبع گرم (شهر رامسر) و یک منبع سرد (ارتفاعات تخت سلیمان) ارائه می‌شود.

**Keywords:** Sub-Atmospheric Vapor Pipeline (SAVP), Seawater Desalination, Mathematical Analysis, Eigen Functions, Temperature Difference.

**کلمات کلیدی:** خط لوله بخار زیراتمسفری، شیرین‌سازی آب دریا، آنالیز ریاضی، توابع ویژه، اختلاف دما.

انتقال بخار زير-اتمسفرى<sup>۱</sup>، توسط لوله و ميعان بخار در مقصد به بهانه نمک‌زدایی آب شور دريا و تأمين آب شرب بعد از سال ۲۰۰۰ مورد توجه واقع شده است و به لحاظ تجربى و تئورى، تحقيقاتى بر روى آن انجام گرفته است (Zarzo and Prats, 2018). استفاده از پتانسيل‌هاى طبيعى، نمک‌زدایی و انتقال آب دريا در مناطق خشک و کم‌آب را به شدت جذاب و توجه‌پذير مى‌نمايد. البته نرخ محدود انتقال آب شيرين و لزوم يافتن منبع طبيعى گرم و سرد براى مطالعه و اجرا، از محدوديت‌هاى طبيعى و بارز روش انتقال بخار زير-اتمسفرى است ولى از طرف ديگر مزايای و نقاط قوت متعددى براى اين روش به لحاظ صنعتى و اقتصادى مترتب است (Del Amo and Antonio, 2012). از ديده‌گاه کاهش شديد يا حذف مصرف انرژى، مزايایى مانند: شيرين‌سازى آب دريا با حداقل انرژى از طريق حذف منبع گرمایى و ادوات مکانیکی، کاهش شديد مصرف انرژى (يا حذف آن) مربوط به انتقال آب، امکان دست‌يابی مجدد به انرژى در مقصد انتقال به وسيله توربين آبی و در آخر استفاده از مزايای کنوانسيون پاریس براى امتياز عدم توليد دی‌اکسید کربن، نمک‌زدایی به روش خط لوله بخار را نسبت به روش‌هاى ديگر بسيار متمایز و ارجح نموده است (Eggleston et al., 2006). از جمله نمک‌زداهاى با مصرف انرژى کم، مى‌توان به تحقيقاتى اشاره نمود که در آن نوآوری شامل دو ستون ده متری است که يکى به‌عنوان تبخير کننده و ديگرى به‌عنوان ميعان کننده طراحى و نصب شده‌اند (Levine and Raton, 2005). قسمتى از آب شيرين با فشار از يک اجکتور گذشته و سپس طبق قانون برنولى در مقطع همگرای اجکتور سرعت سيال زياد شده و به تبع آن فشار کم مى‌شود. آب دريا که توسط يک گرم کننده درجه حرارتش بالا رفته، آماده تبخير شده و همراه آب شيرين از اجکتور عبور مى‌کند. مجموعه دوفازى بخار و آب شيرين سپس در يک مبادله کننده حرارتى خنک و ميعان مى‌شود. عامل اصلى اين انتقال، اختلاف دماى مبدأ و مقصد است. دما، فشار و چگالی سيال تراکم‌پذير (که همان بخار آب باشد) در طى مسير افت پيدا مى‌کند و به همين ترتيب بخارى که به منطقه سرد راه پيدا کرده است، به آرامى ميعان شده و آب شيرين توليد و انباشت مى‌شود. اين تکنیک مى‌تواند از يک کارخانه يا يک ساختمان بلند (مقياس صنعتى) گرفته تا يک بازه ميدانى چندين كيلومترى بين يک شهر ساحلى و ارتفاعات خنک اطرافش (مقياس ميدانى) مانند آنچه قبلاً براى برخى از شهرهاى خاورميانه مطالعه شد، کاربرد داشته باشد (Shojaei et al., 2020; Aghazadeh and Attarnejad, 2020). در مطالعات انجام شده با توجه به موازنه جرم بخار انتقال يافته (Inoue et al., 2024; Aghazadeh and Attarnejad, 2020) يا معادله بقای مومنتوم (Shojaei et al., 2020; Aghazadeh and Attarnejad, 2020) برخى

افزايش رشد جمعيت، توسعه صنعت و کشاورزى، کاهش منابع آب قابل‌استحصال، آلودگى منابع آب موجود شيرين و تاثيرات محيط‌زىستى، سوء مديریت منابع آب، گرم شدن زمين و تغييرات آب و هوايى همگى عواملی هستند که اخيراً منجر به تشديد مسائل آبی شده است. با توجه به موارد مطرح شده و از آن‌جا که بيش از ۹۷ درصد آب جهان، آب دريا است، نمک‌زدایی آب‌هاى لب‌شور و آب دريا اهميت زيادى در حل بحران آب شيرين دارد؛ به گونه‌اى که در سال‌هاى اخير ظرفيت نمک‌زدایی آب در جهان افزايش چشمگيرى داشته است. در نتيجه تصفيه و شيرين‌سازى آب با استفاده از انرژى‌هاى تجديدپذير براى تأمين آب آشاميدنى از اهميت بالايى برخوردار است (پرهيزگار و پورعلى، ۱۳۹۶؛ جمالى کيخا و همکاران ۱۴۰۱؛ حداديان و همکاران ۱۳۹۹؛ سامى و همکاران ۱۳۹۸). امروزه از فناورى‌هاى نوينى به دليل پيشرفت در دانش استفاده مى‌شود که کاهش چشمگيرى در به حداقل رساندن مصرف انرژى دارند. يکى از اين روش‌هاى نوين، استفاده از سامانه انتقال بخار زيراتمسفرى (SAVP) است. سامانه انتقال بخار زيراتمسفرى، يک روش جديد براى نمک‌زدایی از آب دريا است که براساس اختلاف دما بين دو منبع طبيعى گرم و سرد عمل مى‌کند. در اين فرآيند، بخار آب توليدشده در يک تبخيرکننده، در مسير يک خط لوله به سمت منبع سرد حرکت مى‌کند. اين خط لوله به صورت عايق طراحى شده و امکان انتقال بخار با کم‌ترين اتلاف حرارتى را فراهم مى‌کند. در انتهاى مسير، بخار در يک ميعان کننده به مايع تبديل شده و آب شيرين توليد مى‌شود.

استفاده از اين سامانه به‌ويژه در مناطق ساحلى و کوهستانى با اختلاف دماى محسوس، از منظر بهره‌ورى انرژى بسيار قابل توجه است. مزايایى مانند عدم نياز به منابع انرژى فسيلى، کاهش انتشار دی‌اکسید کربن، و حذف تجهيزات مکانیکی سنگين از جمله برترى‌هاى اين روش نسبت به ساير روش‌هاى نمک‌زدایی هستند. اگرچه تاکنون مطالعات مختلفى پيرامون تحليل حرارتى اين فرآيند انجام شده، اما بيش‌تر آن‌ها دماى مرزها را به صورت ثابت در نظر گرفته‌اند. اين فرض با واقعيت عملکرد سيستم در محيط طبيعى مغايرت دارد؛ زيرا دماهاى مرزى در طول شبانه‌روز و فصول تغيير مى‌کنند. در مطالعه حاضر، با بهره‌گيرى از روش تحليل رياضى برپايه توابع ويژه، رفتار دينامیکی دما در طول لوله انتقال مدل‌سازى شده است تا بتوان به درک دقيق‌ترى از پايدارى ترمودينامیکی سيستم دست يافت. اين رويکرد امکان تحليل دقيق‌تر سامانه در شرايط متغير و واقعى را فراهم مى‌سازد.

از حقایق این انتقال کشف شد. در اولی، تنها موازنه جرم بخار و آن هم از طریق معدودی از روابط تجربی مورد بررسی واقع شد و در مرجع بعدی حل معادله مومنتوم به کمک سه معادله آنتوان، پیوستگی و حالت، منجر به استخراج پروفایل دما و فشار شد. مسلماً، هنوز برای انتقال بخار زیر-اتمسفیری، نتایج کامل‌تری مورد انتظار است. اولاً: هر کدام از این دو مورد، به‌نحوی با معادلات تجربی سروکار داشته‌اند و هم‌چنان نیازمند یک پایه ریاضی یا تئوری مستقل و محکم هستند و ثانیاً: این تحقیقات با پیش‌فرض ثابت بودن دما در مبدأ و مقصد انجام شده‌اند و معلوم است که به‌لحاظ کاربردی چنین پیش‌فرضی یک برداشت ناقص از ماهیت طبیعی انتقال بخار زیر-اتمسفیری است. چه در یک مطالعه میدانی که فصول در آن مرتباً تغییر می‌کنند و چه در یک مطالعه صنعتی که دماهای مبدأ و مقصد حتی با سرعت بیش‌تری در نوسان هستند، دیگر ممکن نیست از معادلاتی که از موازنه جرم یا مومنتوم حاصل شده، استفاده کرد و انتظار نتایج درست و دقیق نیز داشت. روش حل از طریق ریاضی برای چنین صورت مسئله‌ای، شامل بررسی انتقال بخار زیر-اتمسفیری طی معادله دیفرانسیل پاره‌ای است که دمای مرزهای آن طی یک الگوی شناخته شده یا قابل‌اعمال، تغییر کند. حل چنین مسئله‌ای چالش‌های ریاضی و مهندسی خاصی را به‌همراه می‌آورد که از طریق حل‌های ساده برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای قابل‌دسترسی نیستند. مطالعه حاضر با استمداد از داده‌های تجربی و آزمایشگاهی که قبلاً انجام شده سعی می‌کند روش ریاضی قابل‌قبولی را برای پیدا کردن پروفایل دما در مسیر انتقال بخار در آب‌شیرین‌کن‌های SAVP در دو مقیاس صنعتی و میدانی ارائه دهد.

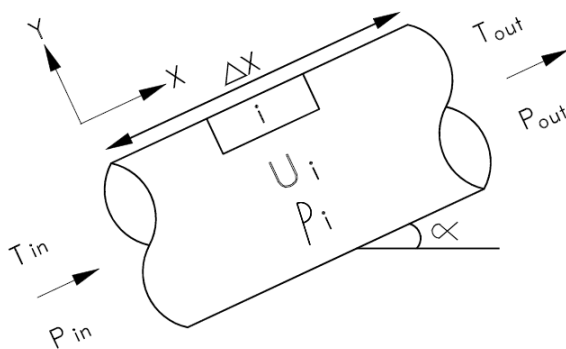
## ۲- روش انجام کار و مطالعه موردی

### ۲-۱- توصیف سامانه انتقال بخار زیر-اتمسفیری

پیش از مدل‌سازی ریاضی انتقال بخار زیر-اتمسفیری برای شیرین‌سازی آب، لازم است توصیفی از مواد و تجهیزاتی که برای این کار نیاز است، انجام شود. یک تبخیر کننده که معمولاً با انرژی گرمایی خورشید در منبع گرم کار می‌کند، موجب تولید بخار می‌شود. فقط طی یک‌بار خلاء در طول عمر چنین آب‌شیرین‌کنی، که به‌صورت مصنوعی انجام می‌شود، بخار در طول لوله صعود می‌کند و در منبع سرد میعان می‌شود. جزئیات انتقال در مقیاس میدانی و صنعتی قبلاً در مراجع آمده و پروفایل‌های دما، فشار و سرعت در سامانه صنعتی موجود است که در این مقاله برای صحت‌سنجی مدل ریاضی مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

### ۲-۲- مدل‌سازی پدیده انتقال مومنتوم در سامانه بخار زیر-اتمسفیری

بخار به‌عنوان سیال تراکم‌پذیر در لوله انتقال بخار زیراتمسفیری حرکت می‌کند و طی افت فشار و افت دما، به‌تدریج رقیق‌تر شده تا به میعان کننده برسد. به‌دلیل تراکم‌پذیر بودن بخار، سرعت سیال در این انتقال افزایش پیدا می‌کند. شرح کاملی از مدل‌سازی انتقال مومنتوم در (Shojaei et al., 2020) آمده است. در این مدل‌سازی، طول لوله انتقال بخار به قطعات بسیار کوچکی تقسیم شده و معادله موازنه مومنتوم همراه با برخی از معادلات تجربی مانند معادله آنتوان، معادله پیوستگی و یک معادله حالت برای گازها با یک تکنیک سعی و خطا حل شد. شکل ۱ و معادله (۱)، مربوط به محاسبات مومنتوم است. حاصل این مدل‌سازی معلوم شدن پروفایل دما، فشار و سرعت در شرایط مرزی با دماهای ثابت و متغیر بود.



شکل ۱- تصویر المانی از لوله انتقال برای محاسبات موازنه جرم و مومنتوم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

شکل ۱ شامل عنصر یا المانی از خط لوله شیب‌دار (با زاویه ثابت  $\alpha$ ) با قطر ثابت، مصادقی از SAVP است که در آن معادله مومنتوم در حالت کلی طی معادله (۱) نوشته می‌شود. انتقال به‌طور عمومی از نقطه ۱ صورت می‌گیرد و تا نقطه ۲ ادامه پیدا می‌کند. فشار، چگالی، سرعت و دمای سیال به‌ترتیب با  $u$ ،  $\rho$ ،  $P$  و  $T$  نشان داده شده است.

### ۲-۳- معادله همرفت-نفوذ

در معادله (۲) منظور شود، به صورت "±" است که نشان دهنده دریافت یا از دست دادن گرما است. منظور از "سیستم" در این جا لوله انتقال بخار است. معادله (۲) را به طور ساده شده ای که منطبق بر انتقال بخار زیراتمسفیری بوده و مناسب برای اعمال حل ریاضی باشد، می توان به صورت معادله (۳) نوشت.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{Q}{\rho c} \quad (3)$$

بدیهی است چنانچه لوله انتقال به صورت عایق کامل فرض شود، ترم  $Q$  (عامل حرارتی خارجی) حذف خواهد شد. در معادله (۳)، انتقال حرارت بخار که دمای آن با  $T$  نشان داده شده، هم به صورت نفوذ<sup>۲</sup> یا پخش حرارت ( $\alpha$ ) صورت می گیرد و هم به صورت همرفتی<sup>۴</sup> (با سرعت  $V_x$ ). همان طور که در مقدمه نیز اشاره شد، روش توابع ویژه در قسمت های آتی توضیح داده خواهد شد. در این روش، باید تکنیکی برای حذف سرعت  $V_x$ ، حل معادله دیفرانسیل پاره ای و سپس جایگذاری سرعت در حل نهایی، معرفی و به کار گرفته شود. خاصیت ترموفیزیکی  $\alpha$ ، در معادله (۳) می تواند برای ساده سازی و درک بهتر مطلب (به خصوص در مقوله جداسازی متغیرها) از عبارت جعلی یا قراردادی  $\alpha^2$  استفاده شود.

### ۲-۴- روش حل از طریق توابع ویژه<sup>۵</sup>

در مدل سازی سامانه انتقال بخار زیراتمسفیری، شرایط مرزی سامانه (دمای تبخیر کننده و میعان کننده) به صورت تابعی از زمان تغییر می کنند. این مسئله باعث می شود که نتوان از روش های کلاسیک جداسازی متغیرها که برای شرایط مرزی ثابت طراحی شده اند، استفاده نمود. بنابراین، برای تحلیل دقیق تر و واقعی تر رفتار سامانه، از "روش توابع ویژه" بهره گرفته شده است. روش توابع ویژه توسعه ای از روش جداسازی متغیرها است که قابلیت حل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی غیرهمگن و وابسته به زمان را دارد. در این روش، ابتدا شرایط مرزی تابع زمان، به صورت ترکیبی از توابع پایه تحلیل می شوند و سپس حل معادله در قالب ترکیب این توابع، به شکل سری بی نهایت ارائه می شود. با این کار می توان رفتار زمانی و مکانی دما را به طور دقیق در طول لوله مدل سازی نمود.

از آن جا که در سامانه SAVP شرایط مرزی به دلیل تأثیرات شبانه روزی و فصلی در حال تغییر هستند، استفاده از این روش، نه تنها ضروری بلکه بسیار مؤثر است. مزیت اصلی این رویکرد نسبت به سایر روش ها، توانایی در نمایش دقیق تغییرات زمانی دما، پیش بینی پروفایل های حرارتی، و تحلیل پایداری سیستم در حالت دینامیکی است.

### ۲-۳-۱- هندسه معادله همرفت-نفوذ در SAVP

انرژی جنبشی سیال، برخی خواص فیزیکی آن (مانند چگالی)، اصطکاک، تنش های برشی و فشار استاتیک در قالب سه هندسه شناخته شده کارتیزین  $(x, y, z)$ ، استوانه ای  $(r, \theta, z)$  و کروی  $(r, \theta, \varphi)$  با هم در توازن قرار می گیرند. نسبت طول به قطر لوله، بی نهایت است. بنابراین، اگرچه شکل لوله به صورت استوانه است، ولی به دلیل کم اهمیت بودن پروفایل دما در جهت شعاع  $r$  و اصالت تغییر دما در جهت  $x$ ، سیستم کارتیزین برای مطالعه و مدل سازی انتخاب شده است.

### ۲-۳-۲- معادله همرفت-نفوذ و عملیات ریاضی در SAVP

انتقال بخار در لوله، می تواند با معادله عمومی همرفت-نفوذ بیان شود. تغییرات دما با زمان و مکان، در این معادله با تغییرات دما ناشی از تغییر سرعت سیال، نفوذ آن و اثرپذیری آن از منابع حرارتی یا برودتی خارجی بیان می شود. رابطه (۲)، معادله همرفت-نفوذ را در خط انتقال بخار نشان می دهد.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q}{\rho c} \quad (2)$$

که  $T$ : دمای بخار،  $t$ : زمان (دقیقه)،  $\alpha$ : ضریب بخش حرارت در حالت انتقال حرارت نفوذی (در توده سیال)،  $\rho$ : چگالی بخار و  $c$ : ظرفیت حرارتی بخار هستند.  $\alpha$ ، از جمله خواص فیزیکی سیال بوده و برابر کسر  $k/(\rho.c)$  است که در آن  $k$  ضریب هدایت گرمایی است.  $\alpha$  دارای واحد سطح بر زمان است (مثلاً:  $m^2/sec$ ) که نشان دهنده کمیت پخش حرارتی<sup>۲</sup> است. برای بخار آب (به عنوان یک گاز)، عدد پخش حرارتی تابعی از دما است و بین ۲۵ تا ۳۰۰ درجه سانتی گراد در بازه  $1/22 \times 10^{-6}$  تا  $1/32 \times 10^{-6}$  مترمربع بر ثانیه تغییر می کند. چنین تغییرات اندکی، به محققین چنین القا می کند که این خاصیت فیزیکی، به خصوص برای انتقال بخار سرد، در واقع فقط یک عدد ثابت است که از سیالی به سیال دیگر، بسته به جنس سیال متغیر خواهد بود (Datta, 2015).

سرعت حرکت سیال ( $V$ ) می تواند در هر سه جهت طول ( $V_x$ )، عرض ( $V_y$ ) و ارتفاع ( $V_z$ ) مصداق داشته باشد.  $Q$  عامل حرارتی خارجی است که می تواند بر حسب تغییرات زمان و مکان (یا هر دو) روی حل معادله (۲) اثرگذار باشد. علامت جبری این عامل حرارتی ( $Q$ )، چنانچه به صورت گرمابخش باشد، مثبت و چنانچه از گرمای سیستم بکاهد، منفی خواهد بود. علامت اصلی که باید

$$\begin{aligned} PDE \quad U(x,t) &= W(x,t) \cdot \exp\left\{\frac{v(x-\frac{vt}{2})}{2\alpha^2}\right\}; 0 < x < L, t > 0 \\ BC_1 \quad U(0,t) &= W(0,t) \cdot \exp\left\{\frac{-V^2 t}{4\alpha^2}\right\}; t > 0 \\ BC_2 \quad W(L,t) &= W(0,t) \cdot \exp\left\{\frac{V(L-\frac{Vt}{2})}{2\alpha^2}\right\}; t > 0 \\ IC \quad U(x,0) &= W(x,0) \cdot \exp\left\{\frac{V \cdot x}{2\alpha^2}\right\}; t = 0, 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (6)$$

آن‌گاه، دستگاه معادله دیفرانسیل جدیدی (دستگاه معادلات (Y)) برحسب  $W(x,t)$ ، با مشخصات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} PDE \quad \frac{\partial W}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; 0 < x < L, t > 0 \\ BC_1 \quad W(0,t) &= f_1(t) / \exp\left\{\frac{-V^2 t}{4\alpha^2}\right\} = g_1(t); t > 0 \\ BC_2 \quad W(L,t) &= f_2(t) / \exp\left\{\frac{V(L-\frac{Vt}{2})}{2\alpha^2}\right\} = g_2(t); t > 0 \\ IC \quad W(x,0) &= \frac{\Phi(x)}{\exp\left\{\frac{V \cdot x}{2\alpha^2}\right\}} = K(x); t = 0, 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (7)$$

دستگاه معادله دیفرانسیل (Y)، در حالت کلی می‌تواند دربرگیرنده اثرات همرفتی در مرز پایانی نیز باشد. برای تبخیرکننده به دلیل تغییرات دمایی محدود آب دریا و همچنین شروع حرکت بخار از سرعت صفر، معمولاً عوامل همرفت تأثیر کمی در دمای بخار نو وجود دارد. درحالی‌که برای میعان‌کننده، سرعت بخار در نقطه میعان به حداکثر خود رسیده، بنابراین هر دو عامل همرفت و نفوذ در این قسمت، تأثیرگذار و قابل‌بحث هستند. عدد پکله<sup>۶</sup> (که نسبت پدیده انتقال همرفتی به پدیده انتقال نفوذی است)، را در دو مکان تبخیرکننده و میعان‌کننده، می‌توان به ترتیب به اعداد کوچک و بسیار بزرگ نسبت داد.

$$\begin{aligned} PDE \quad \frac{1}{\alpha^2} W_t &= W_{xx}; 0 < x < L, t > 0 \\ BC_1 \quad W(0,t) &= g_1(t); t > 0 \\ BC_2 \quad W_x(L,t) + hW(L,t) &= g_2(t); t > 0 \\ IC \quad W(x,0) &= J(x); t = 0, 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (8)$$

وقتی شرایط مرزی تابع زمان باشد، آن‌گاه حل  $W(x,t)$  را می‌توان مجموع دو تابع گذرا<sup>۷</sup>  $Wtr(x,t)$  و پایا<sup>۸</sup>  $S(x,t)$  دانست. عبارت  $tr$  و  $S$  به ترتیب بیان‌گر حل گذرا و پایا هستند. این مفهوم در معادله (۹) منعکس شده است.

$$W(x,t) = Wtr(x,t) + S(x,t) \quad (9)$$

چنان‌چه ملاحظه می‌شود، حل پایا با عبارت  $S(x,t)$  نشان داده شده و تابعیت زمان (t) در آن مشهود است و این می‌تواند یک تناقض محسوب شود. جواب این مطلب این‌گونه است که به دلیل تغییرات محدود دما در ابتدا و انتهای SAVP که به ترتیب، تبخیرکننده و میعان‌کننده در آن قرار دارد در درازمدت، شرایط

روش حل از طریق توابع ویژه، به‌طورکلی یک توسعه ریاضی از روش شناخته شده جداسازی متغیرها است که برای شرایط مرزی ناهمگن، به‌کار می‌رود. شرایط مرزی ناهمگن، معمولاً به شرایطی اطلاق می‌شود که یک شرط مرزی یا هر دو، تابعی از زمان باشند. به دلیل محدود بودن SAVP به لحاظ مکانی و مشخص بودن ابتدا و انتهای آن، شرایط مرزی منطبق با شرایط دمایی تجهیزات تبخیرکننده و میعان‌کننده خواهد بود. در شرایط ناپایا، دمای این دو تجهیز تابع زمان است. به دلیل تغییرات شب و روز و همچنین افت و خیزهایی که برای دما در طول فصول متصور است، چنین حالتی با طبیعت و واقعیت SAVP منطبق است. از این‌رو دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای متناظر با مطلب ذکر شده را می‌توان به وسیله دستگاه معادلات (۴) بیان نمود.

$$\begin{aligned} PDE \quad \frac{\partial U}{\partial t} + V_x \frac{\partial U}{\partial x} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; 0 < x < L, t > 0 \\ BC_1 \quad U(0,t) &= f_1(t); t > 0 \\ BC_2 \quad U(L,t) &= f_2(t); t > 0 \\ IC \quad U(x,0) &= \Phi(x); t = 0, 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (4)$$

تابع وابسته  $U$  در این قسمت، برای انجام و تبیین عملیات ریاضی، نشان دهنده دما است. دستگاه معادله دیفرانسیل پاره‌ای فوق، می‌تواند به‌عنوان واقعی‌ترین و طبیعی‌ترین معادله همرفت-نفوذ برای توصیف پروفایل دما در یک SAVP در نظر گرفته شود و چنان‌که ملاحظه می‌شود ترم سرعت تک‌بعدی در جهت X در آن دیده می‌شود. برای راحتی در نوشتن و انجام عملیات ریاضی، اندیس X از  $V_x$  حذف می‌شود و طرفین معادله بر  $\alpha^2$  تقسیم می‌شود (رابطه (۵)).

$$\begin{aligned} PDE \quad \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{v}{\alpha^2} \frac{\partial U}{\partial x}; 0 < x < L, t > 0 \\ BC_1 \quad U(0,t) &= f_1(t); t > 0 \\ BC_2 \quad U(L,t) &= f_2(t); t > 0 \\ IC \quad U(x,0) &= \Phi(x); t = 0, 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (5)$$

ترم  $\frac{v}{\alpha^2} \frac{\partial U}{\partial x}$  باعث می‌شود حل معادله (۵) با موانع جدی روبه‌رو شود. با حذف ضریب  $\frac{v}{\alpha^2}$  حالتی به وجود می‌آید که طی آن حل این معادله دیفرانسیل ممکن خواهد شد. به عبارت دیگر، معادله (۵) تا هنگامی که ترم  $\frac{\partial U}{\partial x}$  را به‌عنوان ضریب  $\frac{v}{\alpha^2}$  در خود دارد، از طریق تحلیلی قابل‌حل نیست. تکنیک حذف ترم  $\frac{\partial U}{\partial x}$  از طریق یک تغییر متغیر نوآورانه به شرح زیر (دستگاه معادلات (۶)) ممکن خواهد بود که هم برای معادله دیفرانسیل (PDE) و هم شرایط مرزی (BCs) و هم شرایط اولیه (IC) اعمال می‌شود.

۲-۴-۱- روش حل معادلات دیفرانسیل ناهمگن در PDE

مربوط به SAVP از طریق توابع ویژه

حسب وجود ترم ناهمگن  $f(x,t)$  در معادلات دیفرانسیل مربوط به SAVP دستگاه رابطه (۱۵) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} PDE \quad J_t &= \alpha^2 J_{xx} + f(x,t); 0 < x < L, t > 0 \\ BC_1 \quad J(0,t) &= 0; t > 0 \\ BC_2 \quad J(L,t) &= 0; t > 0 \\ IC \quad J(x,0) &= \Phi(x); t = 0, 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (15)$$

همان‌طور که  $J$  (در حالتی که  $f(x,t)$  صفر باشد در روش جداسازی متغیرها از جنس حاصل ضرب  $X(x)T(t)$  انگاشته می‌شود، با توجه به حضور خطی  $f(x,t)$  در PDE فوق، می‌توان این تابع را نیز حاصل ضرب دو تابع مکان و زمان فرض کرد (رابطه (۱۶)).

$$f(x,t) = f(t) \cdot X(x) \quad (16)$$

تابع مکانی هم‌چنان از جنس سینوس فرض می‌شود. بنابراین، ترم ناهمگن به صورت معادلات (۱۷) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} f(x,t) &= f(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned} \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)، تنها  $f_n(t)$  مجهول است که از روی تعامد Sin به صورت رابطه (۱۸) حاصل خواهد شد.

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_{\xi=0}^{\xi=L} f(\xi,t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) d\xi \quad (18)$$

اکنون حل  $J(x,t)$  (و به عبارتی حل  $Wtr$ ) را می‌توان به صورت رابطه (۱۹) نوشت.

$$J(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (19)$$

مشتق‌های  $J$  یعنی  $J_t$  و  $J_{xx}$  با معادلات (۲۰) و (۲۱) معرفی می‌شود.

$$J_t = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (20)$$

$$J_{xx} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot T_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (21)$$

پس از جای‌گذاری در معادله  $J_t = \alpha^2 J_{xx} + f(x,t)$  رابطه (۲۲) به دست می‌آید.

دمایی محدودی را به لوله خط انتقال، تحمیل می‌نماید. از این‌رو، محدود بودن برد تابع  $S(x,t)$  را می‌توان هم‌ارز با پایابودن آن در نظر گرفت. قبلاً نیز چنین استنباطی در مراجع دیده شده است و از آن به‌عنوان یک حل با پایه متقن تئوری استفاده شده است (Demirel and Sandler, 2004; Farlow, 1982). بدیهی است حل پایا بیش‌تر از حل گذرا، تابع شرایط مرزی است (رابطه (۱۰)).

$$S(x,t) = A(t) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) + B(t) \cdot \left(\frac{x}{L}\right) \quad (10)$$

تابع  $S(x,t)$  از جنس  $W$  است. بنابراین، می‌توان آن‌را مانند دستگاه معادلات (۱۱) نوشت.

$$\begin{aligned} PDE \quad \frac{1}{\alpha^2} S_t &= S_{xx}; 0 < x < L, t > 0 \\ BC_1 \quad S(0,t) &= g_1(t); t > 0 \\ BC_2 \quad S_x(L,t) + hS(L,t) &= g_2(t); t > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

شرایط اولیه  $S$ ، مانند شرایط اولیه  $W$  است. توابع زمانی  $B(t)$  و  $A(t)$  و حتی خود تابع پایایی  $S(x,t)$  پس از جاگذاری‌های لازم به صورت رابطه (۱۲) استخراج می‌شوند.

$$\begin{aligned} A(t) &= g_1(t) \\ B(t) &= \frac{1}{1+Lh} [g_1(t) + Lg_2(t)] \\ S(x,t) &= g_1(t) \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{1+Lh} [g_1(t) + Lg_2(t)] \left(\frac{x}{L}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

قسمت گذرای حل یعنی  $Wtr(x,t)$  معادل رابطه (۱۳) خواهد شد.

$$Wtr(x,t) = W(x,t) - S(x,t) \quad (13)$$

حال می‌توان یک معادله دیفرانسیل جدید برای قسمت گذرا مانند دستگاه معادلات (۱۴) در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} PDE \quad W_{tr,t} &= \alpha^2 W_{tr,xx} - S_t(x,t); 0 < x < L, t > 0 \\ BC_1 \quad W_{tr}(0,t) &= g_1(t) - g_1(t) = 0; t > 0 \\ BC_2 \quad W_{x,tr}(L,t) + hW_{tr}(L,t) &= 0; t > 0 \\ IC \quad W_{tr}(x,0) &= \Phi(x) - S(x,0) = \Phi_{tr}(x); t = 0, \\ &0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (14)$$

دستگاه معادلات (۱۴) نشان می‌دهد که شرایط مرزی، همگن شده است ولی ناهمگنی در قالب ترم  $S_t(x,t)$  به داخل PDE نفوذ کرده و در آن ظاهر شده است. با معلوم بودن  $\Phi(x)$  و  $S(x,0)$ ، عبارت  $\Phi_{tr}(x)$  نیز معلوم شده و به دست خواهد آمد. توسط روش حل توابع ویژه که در قسمت بعد توضیح داده می‌شود، ابتدا  $Wtr(x,t)$  محاسبه شده و از آن‌جا توابع اصلی  $W(x,t)$  و  $U(x,t)$  نیز تعیین می‌شود.

$$y(t) = e^{-a(t).t}.y(0) + \int_{\tau=0}^{\tau=t} b(\tau).e^{-a(t).(t-\tau)}d\tau \quad (29)$$

اکنون، حل ODE های  $T_n(t)$  برارابطه (۳۰) است.

$$T_n(t) = T_n(0).e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\alpha\right)^2 t} + \int_0^t f_n(\tau).e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\alpha\right)^2 (t-\tau)}d\tau \quad (30)$$

پس از جای‌گذاری رابطه (۳۱) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{2}{L} \left( \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) \cdot \Phi(\xi) d\xi \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\alpha\right)^2 t} \\ &+ \frac{2}{L} \left( \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\alpha\right)^2 (t-\tau)} \cdot \int_0^L f(\xi, \tau) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) d\xi d\tau \right) \end{aligned} \quad (31)$$

در نتیجه حل نهایی به‌صورت معادله (۳۲) ارائه می‌شود.

$$J(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (32)$$

## ۲-۵- مطالعه موردی

هنگامی که قرار است SAVP در میدان طبیعی اعمال شود، میزان اختلاف دمای منبع سرد و گرم و هم‌چنین فاصله بین این دو منبع پارامترهای بسیار مهمی از نظر امکان‌سنجی محیط هستند. اختلاف دمای بیش‌تر و فاصله کم‌تر، باعث انتقال بیش‌تر بخار می‌شود. درصورت رعایت این دو اولویت، تنها نگرانی فنی و عملیاتی اختلاف ارتفاع بین دو منبع دما خواهد بود. یک مطالعه موردی با نتایج رضایت‌بخش در انتقال آب شیرین‌شده به‌روش SAVP از شهر ساحلی رامسر (شمال ایران) به منطقه سرد ۲۰۰۰ متری تخت سلیمان واقع در حدود ۱۶ کیلومتری انجام شد. اطلاعات داده‌های هواشناسی مربوط به دمای سطح دریا در رامسر (منبع گرم) و ارتفاعات تخت سلیمان (منبع سرد) در جدول ۱ آمده است. دمای سطح دریا در رامسر و ارتفاعات تخت سلیمان در طول یک‌سال در شکل ۲ نمایش داده‌شده است. هر دمایی که با یک نقطه نشان داده شده، میانگین دمای ثبت‌شده در طول یک ماه است. در ارتفاعات تخت سلیمان، میانگین دمای روزانه (حداکثر) و شبانه (حداقل) هر ماه گزارش شده است، در حالی که برای رامسر به‌دلیل تفاوت ناچیز دمای شبانه‌روز در سطح دریا، تنها یک میانگین ماهانه دما گزارش شده است (Climate-Data.org; Weather).

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) &= -\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned} \quad (22)$$

پس از فاکتورگیری، معادله (۲۳) ظاهر خواهد شد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\alpha\right)^2 \cdot T_n(t) - f_n(t)] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0 \quad (23)$$

با توجه به استقلال خطی Sin که کمان‌های آن به‌گونه‌ای است که Sinها همگی با هم صفر نمی‌شوند. بنابراین:

$$T'_n(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\alpha\right)^2 \cdot T_n(t) - f_n(t) = 0 \quad (24)$$

اکنون تعداد n تا ODE ظاهر شده باید با تعداد n شرط اولیه حل شوند. اما این n شرط اولیه به‌صورت رابطه (۲۵) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} J(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ \Phi(x) = J(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ \int_{x=0}^{x=L} \Phi(x) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx & \\ = \int_{x=0}^{x=L} T_n(0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx & \end{aligned} \quad (25)$$

که رابطه (۲۶) حاصل می‌شود.

$$T_n(0) = \frac{2}{L} \int_{\xi=0}^{\xi=L} \Phi(\xi) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L}\xi\right) d\xi ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

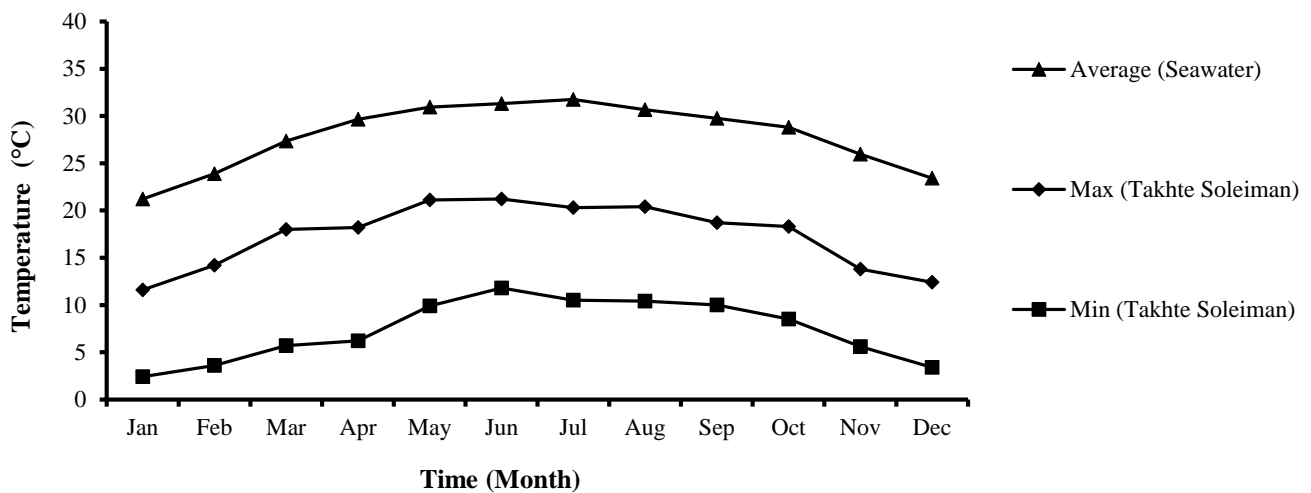
اکنون دستگاه ODE (رابطه (۲۷)) باید حل شود.

$$\begin{aligned} T'_n(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\alpha\right)^2 \cdot T_n(t) - f_n(t) &= 0 \\ T_n(0) = \frac{2}{L} \int_{\xi=0}^{\xi=L} \Phi(\xi) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L}\xi\right) d\xi ; n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

حل این دستگاه ODE با معادلات الگوی (۲۸) انجام خواهد شد.

$$\begin{aligned} ODE \quad y'(t) + a(t) \cdot y(t) &= b(t); t > 0 \\ IC \quad y(0) &= Known; t = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

بنابراین رابطه (۲۹) به‌دست می‌آید.



شکل ۲- دمای سطح دریا در رامسر و ارتفاعات تخت سلیمان در طول یک سال

جدول ۱- دمای هوا و دمای آب دریا برای مناطق موردنظر (برحسب سانتی گراد)

ماه‌های سال	ژانویه	فوریه	مارس	آوریل	می	جون	جولای	اگوست	سپتامبر	اکتبر	نوامبر	دسامبر
ماکزیمم دمای هوا (تخت سلیمان)	۲/۴	۳/۶	۵/۷	۶/۲	۹/۹	۱۱/۸	۱۰/۵	۱۰/۴	۱۰	۸/۵	۵/۶	۳/۴
مینیمم دمای هوا (تخت سلیمان)	۱۱/۶	۱۴/۲	۱۸	۱۸/۲	۲۱/۱	۲۱/۲	۲۰/۳	۲۰/۴	۱۸/۷	۱۸/۳	۱۳/۸	۱۲/۴
متوسط دمای هوا (تخت سلیمان)	۷	۸/۹	۱۱/۸۵	۱۲/۲	۱۵/۵	۱۶/۵	۱۵/۴	۱۵/۴	۱۴/۳۵	۱۳/۴	۹/۷	۷/۹
ماکزیمم دمای آب دریا (رامسر)	۱۴/۸	۱۹/۵	۲۳/۲	۲۴/۲	۲۵/۷	۲۶/۲	۲۶/۴	۲۴/۹	۲۳/۶	۲۲/۶	۱۹/۸	۱۸/۲
مینیمم دمای آب دریا (رامسر)	۲۷/۶	۲۸/۳	۳۱/۵	۳۵/۱	۳۶/۲	۳۶/۴	۳۷/۱	۳۶/۴	۳۵/۹	۳۵	۳۲/۱	۲۸/۶
متوسط دمای آب دریا (رامسر)	۲۱/۲	۲۳/۹	۲۷/۳۵	۲۹/۶۵	۳۰/۹۵	۳۱/۳	۳۱/۷۵	۳۰/۶۵	۲۹/۷۵	۲۸/۸	۲۵/۹۵	۲۳/۴

### ۳- نتایج و تحلیل نتایج

#### ۳-۱- محاسبات و بحث SAVP از طریق معادله انرژی

##### برای سیستم آزمایشگاهی

در تحلیل نتایج سیستم SAVP، رسیدن به یک وضعیت پایدار از اهمیت بالایی برخوردار است. براساس نتایج مدل‌سازی و تحلیل‌های عددی، مشاهده شد که پس از اعمال تغییرات دمایی در مرزهای سیستم، در یک بازه زمانی مشخص (مثلاً دو ساعت در مدل آزمایشگاهی)، شرایط ترمودینامیکی به تعادل می‌رسند. این رفتار در نمودارهای پروفایل دما (شکل ۳ و ۴) به خوبی مشهود است.

از سوی دیگر، تغییرات دمایی ناشی از نوسانات شبانه‌روزی و فصلی، به‌ویژه در مقیاس‌های میدانی با طول زیاد لوله، تأثیر قابل توجهی بر نرخ انتقال حرارت، میعان و در نتیجه عملکرد کلی سیستم می‌گذارد. به‌همین دلیل، فرض دمای ثابت در مرزها نمی‌تواند رفتار واقعی سیستم را نمایش دهد. این نکته در تحلیل‌های میدانی این مقاله نیز مدنظر قرار گرفته و مدل‌سازی با در نظر گرفتن شرایط مرزی متغیر در طول زمان انجام شده است. این تغییرات باعث می‌شود که حل گذرا و پایدار سیستم به‌صورت

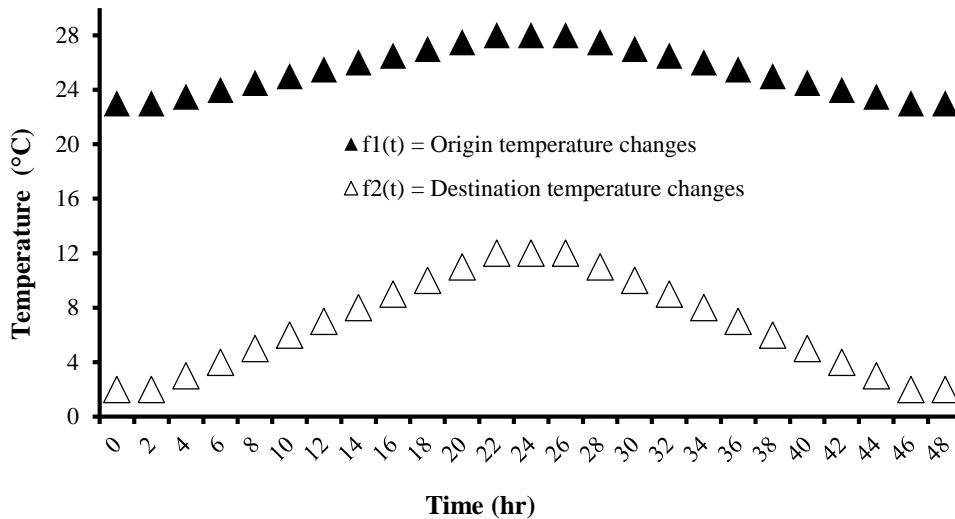
دینامیکی بررسی شود. بنابراین استفاده از مدل‌هایی مانند معادله همرفت-نفوذ با شرایط مرزی زمانی و روش توابع ویژه، برای دستیابی به نتایج معتبر و نزدیک به واقعیت، کاملاً ضروری است. در سیستم آزمایشگاهی SAVP می‌توان شرایط مرزی را توابع خفیف و یا شدیدی از زمان اتخاذ کرد. منظور از تغییرات دمایی خفیف و شدید این‌گونه است که پس از هر تغییر در دماهای مبدأ و مقصد آیا کل SAVP به تعادل ترمودینامیکی می‌رسد یا هم‌چنان در حالت ناپایا در حالت دینامیکی از تغییرات مداوم دما در طول لوله است؟! این دو حالت به‌دلیل محدود بودن طول لوله، به‌طور عملی قابل مطالعه است. توابع ویژه به‌لحاظ ریاضی قابلیت این‌را دارد که به‌سادگی پروفایل حقیقی دما را برای تغییرات خفیف دمایی در مرزها، پیش‌بینی نماید. بنابراین، فرض ترمودینامیک حالت پایدار با این حالت عجیب است و می‌توان از معادله (۳۲) (که حل از طریق توابع ویژه است) برای پیش‌بینی پروفایل دما استفاده نمود.

#### ۳-۲- محاسبات و بحث SAVP از طریق معادله همرفت-نفوذ حرارت (توابع ویژه)

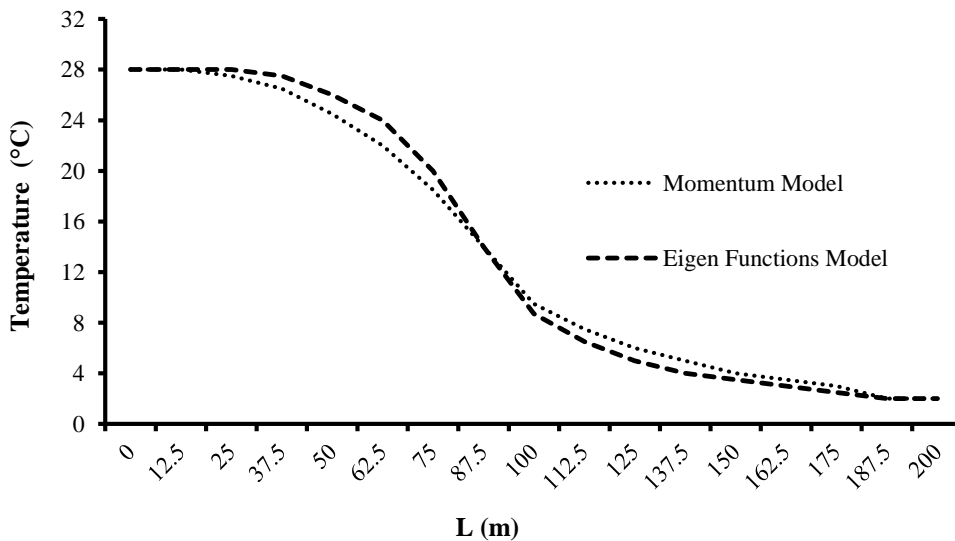
معادله همرفت-نفوذ حرارت برای حالتی که SAVP به تعادل

زمان تغییر می‌کنند به صورت نوعی<sup>۹</sup> معرفی می‌شوند. این دو تابع در واقع می‌توانند کاملاً دلخواه باشند که توسط کاربر به مدل ریاضی تحمیل می‌شوند. در این جا دو تابع سهموی شکل که در فاصله زمانی میانه دارای یک حداکثر هستند، به عنوان یک مثال کاربردی معرفی شده‌اند. طول زمان اعمال این دو تابع زمانی به گونه‌ای است که (حسب تجربه‌ای که از دستگاه حاصل شده) می‌توانند پس از هر تغییر که به دو ساعت می‌انجامد، سیستم را وادار به رسیدن به حالت تعادل نماید. به عبارتی، گام‌های دو ساعته تغییر دما به گونه‌ای تنظیم شده‌اند که طی آن آب شیرین‌کن آزمایشگاهی می‌تواند تعادل پایدار یک حالت ترمودینامیکی را ترک کرده و به تعادل ترمودینامیکی جدید برسد و در آن پایدار شود.

رسیده است از طریق توابع ویژه برای دو حالت حداقل و حداکثر اختلاف دما برای شورترین آب ( $S = 4\%$ ) به کار گرفته شده و با نتایج معادله مومنتوم مقایسه شد. شکل‌های ۳ و ۴ نتایج حل پروفایل دما را از طریق توابع ویژه و مقایسه آن با نتایج حل معادله مومنتوم نشان می‌دهد. در واقع شکل ۳ که تغییرات دما را در بازه ۴۸ ساعت نشان می‌دهد، از روی تجربه عملیاتی، ثابت کرد که در هر تغییر، فرصت کافی برای به تعادل رسیدن SAVP حاصل شده است. نتیجه اعمال این تغییرات دما منجر به شکل ۳ شد. در شکل ۴ نتایج پروفایل دما از طریق حل معادله همرفت-نفوذ حرارت با حل از طریق معادله مومنتوم مقایسه شده است. نقاط نمایش داده شده در شکل ۴ نقاط تجربی است. توافق قابل قبولی بین دو تئوری و نقاط تجربی به چشم می‌خورد. دو تابع  $f_1(t)$  و  $f_2(t)$  به عنوان توابع دمایی که در مرزها با

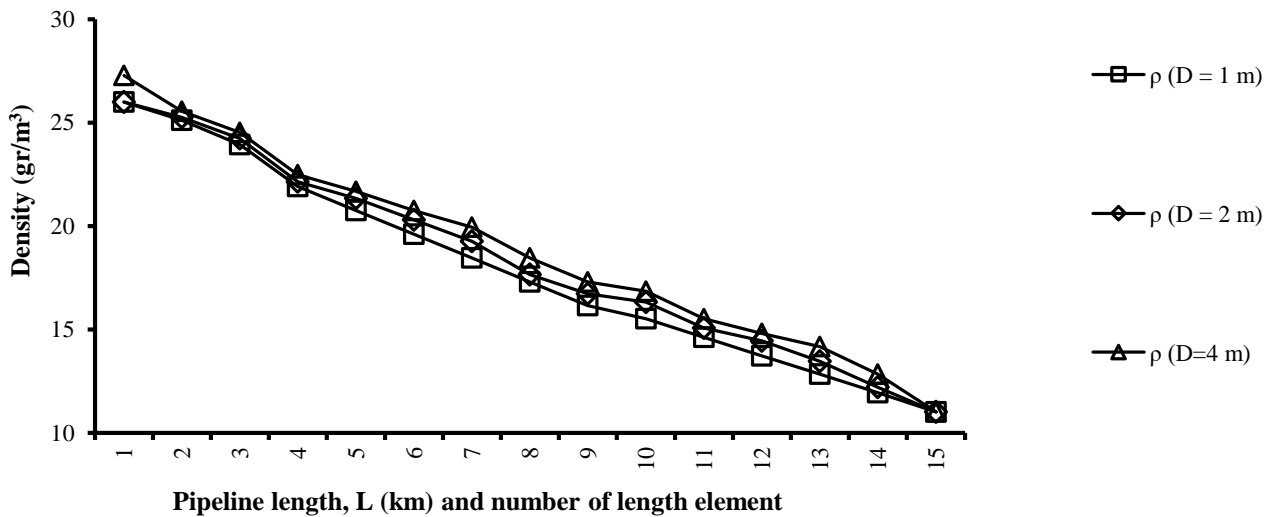


شکل ۳- اعمال تغییرات دمایی برای حل معادله انتقال-نفوذ حرارت از طریق توابع ویژه



شکل ۴- نمایش پروفایل دما در سیستم آزمایشگاهی محاسبه شده از طریق مدل مومنتوم و حل معادله انتقال-نفوذ با استفاده از توابع ویژه برای قطر یک اینچ و شوری چهار درصد وزنی در دمای مبدأ ۲۸ و دمای مقصد ۲ درجه سانتی‌گراد

شرایط تعادلی در لوله حادث می‌شود، مضاف بر این که تغییرات زمانی دما در مرزها، حاصل از تغییرات اقلیمی و آب و هوایی بوده و خواه‌ناخواه آن‌چنان شدید نیست که شرایط ناپایا به لوله اعمال نماید. به بیان دیگر، دو عامل طولی بودن لوله و تغییرات ملایم و طبیعی دما، ایجاب می‌کند که تنها از طریق حل توابع ویژه یعنی معادله (۳۲)، پروفایل دما برای لوله طولی به کار گرفته شود. بنابراین، ابتدا شکل تغییرات دما برحسب فصل برای مسیر مطالعه موردی رامسر-تخت سلیمان در شکل ۵ ارائه و حل آن طی معادله (۳۲) ارائه می‌شود. برای شکل ۵، شوری چهار درصد وزنی برای آب در نظر گرفته شده است. این شکل به لحاظ ارزش، بسیار نزدیک به شکل پروفایل دما حاصل از حل معادله مومنتوم است که در شکل ۴ ارائه شده است.



شکل ۵- تقسیم‌بندی المانی خط انتقال بخار بین رامسر و تخت سلیمان شامل چگالی بخار در هر المان برای اقطار ۱، ۲ و ۴ متر در طول مسیر برای شوری ۴ درصد وزنی (طول هر المان ۱۰۰۰ متر است)

- داده‌برداری میدانی از پروژه‌های عملیاتی واقعی انجام شود.
- مدل ریاضی حاضر با شبیه‌سازی‌های عددی مانند دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) ترکیب شود.
- از تکنیک‌های یادگیری ماشین برای تقریب توابع شرایط مرزی در مکان‌های فاقد داده‌های دقیق هواشناسی استفاده شود.
- جنبه‌های اقتصادی و محیط‌زیستی طرح (مانند بهینه‌سازی قطر لوله یا جنس آن) نیز به صورت یکپارچه وارد مدل شوند.

#### ۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

این پژوهش با هدف تحلیل رفتار حرارتی سامانه انتقال بخار زیراتمسفری (SAVP) در فرآیند نم‌زدایی آب دریا، مدلی ریاضی مبتنی بر معادله همرفت-نفوذ حرارت با شرایط مرزی متغیر زمانی ارائه داد. نوآوری اصلی این تحقیق، استفاده از روش

شکل ۴ که براساس به تعادل رسیدن اعمال دما در مرزها تبیین شده در واقع تغییرات دمایی  $f_1(t)$  و  $f_2(t)$  را در خود دارد و برای قطر یک اینچ و شوری چهار درصد، پروفایل دما را از دو طریق حل معادله انتقال-نفوذ (به کمک روش توابع ویژه) و مدل مومنتوم ارائه می‌دهد. این شکل می‌تواند شامل چندین منوگراف باشد ولی شکل حاضر، تنها زمانی که  $f_1(t)$  به ۲۸ و  $f_2(t)$  به ۲ درجه سانتی‌گراد رسیده را نشان می‌دهد.

#### ۳-۳- محاسبات و بحث SAVP از طریق معادله همرفت-نفوذ حرارت (توابع ویژه) برای ابعاد میدانی

در ارائه پروفایل دما در ابعاد میدانی، آن‌چنان که از ماهیت طول لوله پیدا است با هر تغییر در مرزها (چه شدید و چه خفیف)

#### ۴- محدودیت‌ها و پیشنهاداتی برای مطالعات آتی

با وجود مزایای تحلیل ریاضی ارائه شده در این تحقیق، برخی محدودیت‌ها در مدل‌سازی وجود دارد که لازم است در مطالعات آتی مورد توجه قرارگیرند. از جمله این محدودیت‌ها می‌توان به فرض عایق بودن کامل خط لوله و یکنواخت بودن خواص ترموفیزیکی بخار اشاره کرد. هم‌چنین در این پژوهش، داده‌های تجربی برای اعتبارسنجی مدل در مقیاس میدانی در دسترس نبوده و تحلیل‌ها عمدتاً مبتنی بر داده‌های آزمایشگاهی و محاسبات تئوریک انجام شده است.

برای بهبود دقت مدل‌سازی و افزایش قابلیت تعمیم آن، در مطالعات آتی موارد زیر که می‌تواند راه را برای توسعه سامانه‌های SAVP در مقیاس‌های بزرگ‌تر و شرایط واقعی‌تر هموار سازد پیشنهاد می‌شود:

کاربردی و عملی نمود.

#### ۶- پی‌نوشت‌ها

- 1- Sub-Atmospheric Vapor Pipeline (SAVP)
- 2- Thermal diffusivity
- 3- Diffusion
- 4- Convection
- 5- Eigenfunction Expansion
- 6- Pecklet Number; Pe
- 7- Transition;  $Wtr(x,t)$
- 8- Steady;  $S(x,t)$
- 9- Typical

#### ۷- مراجع

پرهیزگار، ف. و پورعلی، ا. (۱۳۹۶). "بهینه‌سازی تولید هم‌زمان آب شیرین و توان در نیروگاه‌های حرارتی"، *علوم و مهندسی آب و فاضلاب*، ۲(۱)، ۳۸-۴۵.

جمالی کیخا، ا.، بهزادمهر، ا.، ابراهیمی، ا.، کیخوائی، م. و فنایی شیخ‌الاسلامی، ف. (۱۴۰۱). "مدل‌سازی عددی آب شیرین‌کن یون‌زدایی خازنی و مطالعه پارامترهای مؤثر بر عملکرد آن"، *آب و فاضلاب*، ۳۴(۲)، ۹۱-۱۰۴.

حدادیان، ز.، انصاری، م.، حقیقی، ع. و مقیمی‌پور، ا. (۱۳۹۹). "ارزیابی عملکرد مدل آزمایشگاهی ترکیبی اسمز معکوس-اسمز مستقیم برای افزایش بازدهی تولید فرایند نمک‌زدایی"، *آب و فاضلاب*، ۳۲(۲)، ۵۴-۶۷.

سامی، ب.، ضرغامی، م.، یگانی، ر. و صباحی، م. (۱۳۹۸). "طراحی سیستم آب شیرین‌کن خورشیدی به‌روش اسمز معکوس-فتولتائیک (مطالعه موردی: آب لب‌شور روستای سربند اردبیل)"، *علوم و مهندسی آب و فاضلاب*، ۴(۲)، ۳۷-۴۶.

Aghazadeh, K., and Attarnejad, R., (2020), "Improved desalination pipeline system utilizing the temperature difference under sub-atmospheric pressure", *Journal of Water Resource Management*, 34(15), 1-19, <https://doi.org/10.1007/s11269-019-02415-4>.

Aghazadeh, K., and Attarnejad, R., (2020), "Study of sweetened seawater transportation by temperature difference", *Journal of Heliyon*, 6(3), e03573.

Aghazadeh, K., and Attarnejad, R., (2024), "Experimental investigation of desalination pipeline system and vapor transportation by temperature difference under sub-atmospheric pressure", *Journal of Water Process Engineering*, 60, 105133.

Climate-Data.org [Online]. Available: <https://fa.climate-data.org>.

Datta, A.K., (2002), *Biological and bioenvironmental*

توابع ویژه برای حل معادلات دیفرانسیل با مرزهای دینامیکی است که امکان مدل‌سازی دقیق رفتار گذرا و پایدار سیستم را فراهم می‌سازد.

نتایج این مقاله نشان داد که خط لوله شیرین‌سازی به‌روش SAVP که اساسی‌ترین قسمت این تجهیز است، می‌تواند به‌وسیله معادله مومنتوم و معادله انتقال-نفوذ حرارت مدل شود و نتایج یکسانی را حاصل نماید. پروفایل دما، کلیدی‌ترین خروجی است که می‌تواند به‌عنوان حل معادله مومنتوم و حل معادله انتقال-نفوذ حرارت برای سیستم SAVP متصور شد. معادله انتقال-نفوذ، از طریق توابع ویژه برای سیستم آزمایشگاهی و میدانی حل شد. این حل‌ها، به‌نوعی نگرشی بر نحوه کارکرد SAVP از دو دیدگاه مختلف است که می‌تواند مؤید صحت افت فشار، افت دما، چگالی و سرعت سیال در لوله باشد. در حالت آزمایشگاهی، به‌کمک داده‌های حاصل از افت دما و تعیین سرعت در خروجی، محاسبات پروفایل دما از طریق حل معادله همرفت-نفوذ صحنه‌گذاری و تأیید شد. معادله همرفت-نفوذ حرارت در سیستم آزمایشگاهی، برای تغییرات خفیف و شدید دما، از طریق توابع ویژه حل شد و نتایج قانع‌کننده‌ای حاصل شد. برپایه این توافق بین آزمایش و تئوری، محاسبات پروفایل دما در حالت میدانی، مرور و ارائه شد. اگرچه داده آزمایشگاهی برای حالت میدانی در دسترس نیست ولی باز هم توافق خوبی بین پروفایل دما حاصل از حل معادله مومنتوم و حل معادله انتقال-نفوذ حرارت حاصل شده است.

در یک مقایسه مادی در مقیاس مطالعه موردی، به‌راحتی می‌توان دریافت که جرم مواد به‌کار رفته در مبدأ گرم و مقصد سرد در مقایسه با جرمی که برای خط انتقال بخار سرد در نظر گرفته می‌شود بسیار ناچیز است. این حقیقت از دیدگاه مهندسی اهمیت سرمایه‌گذاری برای لوله‌کشی را گوشزد می‌کند و احتمالاً به‌لحاظ مدیریت اجرای طرح، توجه معنی‌داری به این مرحله اختصاص داده خواهد شد. علی‌رغم واقعیتی که در ورای طولیل بودن لوله انتقال بخار نهفته است، این روزها صنعت تولید لوله‌های مرغوب و کم وزن در اقطار مختلف با ضریب استحکام قابل قبول و عایق جرم و حرارت و نیز مهارت نصب و بهره‌برداری از خط لوله در مرحله اطمینان‌بخشی قرارداد و اصولاً با توجه به بازگشت سرمایه‌گذاری در زمان مناسب، مانع و محدودیتی در امر لوله‌گذاری به‌چشم نمی‌خورد. تنها با انجام مطالعات متعارف محیط‌زیستی و هواشناسی و همین‌طور اشراف به وضعیت دمایی مبدأ و مقصد و انتخاب نقاط صحیح برای انتقال، می‌توان طرح انتقال بخار از طریق SAVP را به‌لحاظ مهندسی و اجرایی نیز

- heat and mass transfer*, CRC Press.
- Del Amo, A., and Antonio, P., (2012), "System and method for desalinating seawater", *Patent WO/171986 A1*.
- Demirel, Y., and Sandler, S.I., (2004), "Nonequilibrium thermodynamics in engineering and science", *Journal of Physical Chemistry B*, 108(1), 31-43.
- Eggleston, S., Buendia, L., Miwa, K., Ngara, T., and Tanabe, K., (2006), "IPCC guidelines for national greenhouse gas inventories", *Intergovernmental Panel on Climate Change*, Paris Convention February.
- Farlow, S.J., (1982), *Partial differential equations for scientists and engineers*, Dover Books on Mathematics, John Wiley & Sons.
- Inoue, K., Abe, Y., Murakami, M., and Mori, T., (2006), "Feasibility study of desalination technology utilizing the temperature difference between seawater and inland atmosphere", *Desalination*, 197, 137-153, <https://doi.org/10.1016/j.desal.2005.12.021>.
- Levine, M.R., and Raton, B., (2005), "Low energy vacuum desalination method and apparatus", Patent US/7431806 B2.
- Shojaei, M., Nosrati, M., Attarnejad, R., and Saghafian, B., (2020), "Thermodynamics of sub-atmospheric vapor pipeline (SAVP) for seawater desalination; A study for vapor-liquid equilibrium and the fluid properties associated with a field application", *Desalination and Water Treatment*, 206, 133-143, <https://doi.org/10.5004/dwt.2020.26370>.
- Shojaei, M., Nosrati, M., Attarnejad, R., and Saghafian, B., (2020), "Seawater desalination through natural temperature difference: An experimental, theoretical, and place case study", *Desalination and Water Treatment*, 195, 64-78, <https://doi.org/10.5004/dwt.2020.25894>.
- Shojaei, M., Nosrati, M., and Attarnejad, R., (2021), "Mathematical analysis of sub-atmospheric Vapor pipeline (SAVP) transmission for seawater desalination; Green and Eigen functions solutions", *Desalination and Water Treatment*, 254, 169-180, <https://doi.org/10.5004/dwt.2022.28373>.
- Weather [Online]. Available: <http://irimo.ir>.
- Zarzo, D., and Prats, D., (2018), "Desalination and energy consumption. What can we expect in the near future?", *Journal of Desalination*, 427, 1-9, <https://doi.org/doi:10.1016/j.desal.2017.10.046>



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC-BY) license.