

Research Paper

مقاله پژوهشی

Numerical Solution of Advection-Dispersion
Equation using Mesh-free Petrov-Galerkin
Method (Case Study: Murray Burn River)

حل عددی معادله جابه‌جایی-پراکندگی با روش عددی
بدون شبکه پتروو-گالرکین
(مطالعه موردی: رودخانه مری‌برن)

Zakie Gholami¹, Mehdi Yasi^{2*}, Arezoo Nazi
Ghameshlou³ and Mehdi Mazaheri⁴

زکیه غلامی^۱، مهدی یاسی^{۲*}، آرزو نازی قمشلو^۳ و مهدی مظاهری^۴
۱- دانشجوی دکتری، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده مهندسی
و فناوری کشاورزی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.
۲- دانشیار، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده مهندسی و فناوری
کشاورزی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.
۳- استادیار، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده مهندسی و فناوری
کشاورزی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.
۴- دانشیار، گروه سازه‌های آبی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس،
تهران، ایران.

1- Ph.D. Candidate of Water Structures, Department of
Irrigation and Reclamation Engineering, Faculty of Agricultural
Engineering and Technology, College of Agriculture and
Natural Resources, University of Tehran, Karaj, Iran.

2- Associate Professor, Department of Irrigation and
Reclamation Engineering, Faculty of Agricultural Engineering
and Technology, College of Agriculture and Natural Resources,
University of Tehran, Karaj, Iran.

3- Assistant Professor, Department of Irrigation and
Reclamation Engineering, Faculty of Agricultural Engineering
and Technology, College of Agriculture and Natural Resources,
University of Tehran, Karaj, Iran.

4- Associate Professor, Department of Water Structures, Faculty
of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

* Corresponding Author: m.yasi@ut.ac.ir

* نویسنده مسئول، ایمیل: m.yasi@ut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۱/۱۸

تاریخ اصلاح: ۱۴۰۰/۰۱/۳۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۱۳

© انجمن آب و فاضلاب ایران

Received: 06/02/2021

Revised: 19/04/2021

Accepted: 03/05/2021

© IWWA

Abstract

چکیده

Transport of pollutants in rivers is one of the most important issues in the environment. Many researchers have solved the advection-dispersion equation by various numerical methods, including finite difference and finite element methods. Despite their advantages, these methods also have disadvantages that are often related to netting of the problem domain. Therefore application of mesh-free methods which do not require solution domain network seems necessary. In the present study, the one-dimensional advection-dispersion equation has been solved using the Mesh-free Local Petrov-Galerkin method in the unsteady state. The Murray Burn River data were used to evaluate the performance of the model. The used approximation and weight function were the moving least squares function and the cubic spline function, respectively. In this study, 9 experiments were used to calibrate the model and 2 experiments were used to validate it. For calibration, the discharge coefficient and velocity plotted against the flow rate, and the power regression equation was extracted which had correlation coefficients of 0.925 and 0.988, respectively. In the validation mode, the dispersion coefficient and velocity were optimized by minimizing the mean squared error between computational and observational concentration for each model. The dispersion coefficient in this study was in the range of 0.13-1.1 m²/s for the flow rate of 13-437 L/s. The results indicated the acceptable performance and accuracy of mesh-free method.

انتقال آلاینده‌ها در رودخانه‌ها یکی از مهم‌ترین مسائل در محیط‌زیست است. بسیاری از محققین به حل معادله جابه‌جایی-پراکندگی به روش‌های گوناگون عددی از جمله روش تفاضل محدود و اجزای محدود پرداختند. این روش‌ها علی‌رغم مزایایی که دارند، دارای معایبی نیز هستند که اکثراً مرتبط با شبکه‌بندی دامنه مسئله است، به همین علت استفاده از روش‌های بدون شبکه که نیازی به شبکه‌بندی دامنه حل ندارند، ضروری به نظر می‌رسد. در تحقیق حاضر، حل یک‌بعدی معادله جابه‌جایی-پراکندگی با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین در حالت غیرمستقر انجام شده، و به منظور بررسی صحت عملکرد مدل از داده‌های رودخانه مری‌برن استفاده شد. تابع تقریب و تابع وزن به کار رفته در روش مورد مطالعه، به ترتیب تابع حداقل مربعات متحرک و تابع کیوبیک اسپلاین است. در این پژوهش، ۹ آزمایش برای واسنجی مدل و ۲ آزمایش برای اعتبارسنجی آن استفاده شد. برای واسنجی، نمودار ضریب پراکندگی و سرعت نسبت به دبی رسم و معادله رگرسیونی توانی استخراج شد که به ترتیب دارای ضریب همبستگی ۰/۹۲۵ و ۰/۹۸۸ بودند. در حالت اعتبارسنجی نیز، برای هر مدل ضریب پراکندگی و سرعت با به حداقل رساندن معیار میانگین مربعات خطای غلظت محاسباتی و مشاهداتی بهینه شد. مقدار ضریب پراکندگی در این تحقیق در بازه ۰/۱۳-۱/۱ مترمربع بر ثانیه، برای محدوده دبی ۱۳-۴۳۷ لیتر بر ثانیه به دست آمد. نتایج این مطالعه حاکی از عملکرد و دقت قابل قبول روش بدون شبکه است.

Keywords: Cubic Spline Function, Mesh-Free Local Petrov-Galerkin Method, Moving Least Squares Function, Pollutant Transport.

کلمات کلیدی: انتقال آلاینده، روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین، تابع حداقل مربعات متحرک، تابع کیوبیک اسپلاین.

مشهدگره و همکاران (۱۳۹۲)، حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در حالت یک بعدی با ضرایب (سرعت و ضریب پراکندگی) ثابت و به ازای الگوی زمانی دلخواه منابع آلاینده نقطه‌ای توسط روش تابع گرین را انجام دادند. ایشان به منظور تعمیم نتایج به حالت واقعی، غلظت حاصل از بارگذاری دو منبع تخلیه آلاینده را با الگوی زمانی نامنظم با روش تابع گرین تعیین و به دلیل عدم وجود حل تحلیلی در این موارد، نتایج آن را با نتایج حاصل از نرم‌افزار مایک ۱۱ مقایسه کردند. نمودارهای نهایی و تحلیل شاخص‌های آماری در پژوهش ایشان، حاکی از انطباق نتایج راه‌حل تحلیلی پیشنهادی با نتایج حاصل از مایک ۱۱ است. براتی مقدم و همکاران (۱۳۹۴)، مدل یک بعدی جدید و جامعی را با تلفیق الگوهای عددی با درجهٔ دقت بسیار (روش QUICK) برای شبیه‌سازی انتقال آلاینده با لحاظ نگهداشت موقت و جذب سینتیک در رودخانه‌ها با مقطع نامنظم تحت رژیم جریان غیرماندگار ارائه دادند. نتایج اجرای مدل برای مثال فرضی و دو سری دادهٔ واقعی و مقایسهٔ آن‌ها با نتایج دو مدل رایج دیگر، حاکی از دقت مطلوب و پایداری عددی فراوان آن است. ایشان مدل مذکور را در بسیاری از مطالعات انتقال آلاینده به‌عنوان جایگزین مناسبی برای مدل‌های رایج فعلی پیشنهاد کردند. Kolahdoozan and Gargary (2015). به حل معادله یک بعدی جابجایی- پخشیدگی با استفاده از روش بدون شبکه‌بندی حداقل مربعات گسسته ترکیبی پرداختند. ایشان برای ساخت توابع شکل در روش بدون شبکه‌بندی، از تقریب حداقل مربعات متحرک (MLS^6) استفاده کردند. روش به‌کار گرفته شده در این تحقیق با حل معادله جابجایی- پخشیدگی یک بعدی به‌عنوان یک معادله تفاضل جزئی سهموی، توسعه داده شد. نتایج بدست آمده با حل‌های تحلیلی مقایسه شد که نتایج حاکی از دقت و عملکرد بالای روش به‌کار برده است.

Mousavi et al. (2016) حل توابع پایه شعاعی محلی^۸ در معادله جابجایی- پخشیدگی دو بعدی با روش تفاضل محدود را مقایسه کردند. ایشان با استفاده از تکنیک محلی‌سازی حل خاص تقریبی^{۱۰}، برای برطرف‌سازی دو مشکل به‌خوبی شناخته شده توابع پایه شعاعی استفاده کرده و هم‌چنین برای ارزیابی دقت روش LMAPS به‌عنوان یک روش بدون شبکه‌بندی، از روش شبکه‌بندی شده FDM در این مطالعه به‌کار بردند. نتایج ایشان نشان داد که روش LMAPS در مقایسه با روش FDM پیشنهاد شده، دقت و پایداری بالاتری دارد. محتشمی (۱۳۹۵) مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد دشت بیرجند را با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین انجام دادند. ایشان

معادله حاکم بر پدیده انتقال آلودگی در رودخانه‌ها، معادله جابجایی- پراکندگی است که از نوع معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی است. این معادله در حالت کلی معادله حرکت نامیده می‌شود و از ترکیب معادله پیوستگی و قانون اول فیک^۱ به‌دست می‌آید (Chapra, 1997). انتشار آلودگی در رودخانه‌ها به دو دسته کلی آزمایشگاهی و تئوری تقسیم می‌شود. در هر روش نیاز به توسعه مدل برای پیش‌بینی رفتار پدیده‌ی انتقال و انتشار آلودگی در رودخانه‌ها است. در روش‌های نظری از روش‌های محاسبات عددی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر پدیده استفاده می‌شود، که در نهایت منجر به تولید مدل‌های عددی و نرم‌افزارهای تجاری می‌شود (Chapra, 1997).

حل معادله انتقال آلاینده فقط در حالت‌های بسیار ساده به‌صورت تحلیلی وجود دارد و برای حالات کاربردی به‌دلیل پیچیدگی رفتار واقعی یک سیستم در طبیعت، استفاده از روش‌های عددی اجتناب‌ناپذیر است. روش‌های عددی تفاضل محدود^۲، اجزای محدود^۳، احجام محدود^۴ و ... مجموعه روش‌هایی هستند که با ایجاد شبکه در میدان حل، مقادیر موردنظر در معادلات را تخمین می‌زنند. علی‌رغم مزایای فراوان، روش‌های عددی دارای محدودیت‌هایی نیز هستند. با این‌که فهم و برنامه‌نویسی مدل‌های تفاضل‌های محدود نسبتاً آسان است، اما کاربرد این روش محدود به شبکه‌های مستطیلی است که این‌گونه شبکه‌ها نمی‌توانند به‌خوبی هندسه مسئله را پوشش بدهند و در مرزها ایجاد خطا می‌کنند. روش‌های اجزای محدود و حجم‌های محدود نیز در ارتباط با هندسه مسئله منعطف هستند، اما تولید شبکه‌های سه‌بعدی و برنامه‌نویسی این روش‌ها کار پیچیده‌ای است. از این‌رو، در طی سال‌های اخیر توجه فراوانی به گسترش روش‌های بدون شبکه شده است (Li et al., 2003). روش‌های بدون شبکه از نوین‌ترین روش‌های عددی در سال‌های اخیر هستند که توانسته‌اند پاره‌ای از معایب روش‌های مبتنی بر شبکه‌بندی را اصلاح کرده و مسائلی را حل کنند که تحلیل آن‌ها با روش‌های مبتنی بر شبکه‌بندی یا به‌طور کلی امکان‌پذیر نبوده و یا این‌که نیاز به صرف هزینه و زمان زیادی دارند. بسته به این‌که اساس کار روش‌ها برپایه روند فرمول‌بندی، تقریب یا درون‌یابی، یا نمایش دامنه باشد، می‌توان روش‌های مختلفی را در نظر گرفت. روش محلی پتروو-گالرکین^۵ یکی از روش‌های بدون شبکه است که شکل ضعیف محلی برای توسعه آن به‌کار می‌رود (Liu, 2002; Atluri and Zhu, 1998; Lin and Atluri, 2000).

آلودگی شد. مدل پیشنهادی در این تحقیق، در ابتدا با استفاده از حل‌های تحلیلی یک و دو بعدی اعتبارسنجی و سپس برای حل مسائل فرضی و واقعی به کار برده شد. مدل توسعه داده شده با نتایج مدل‌های MODFLOW و MT3DMS به ترتیب برای هد آب و مقدار غلظت مقایسه شد. نتایج نشان داد مدل مذکور برای هر دو مورد، خروجی‌های رضایت‌بخشی دارد و برای شبیه‌سازی آکیفرهای ناهمگون مناسب است. همچنین محقق شد که می‌توان با افزایش شعاع دامنه تأثیر، دقت مدل را نسبت به روش‌های تفاضل محدود و اجزای محدود که نیاز به شبکه‌بندی اولیه و مجدد دارند، افزایش داد.

مرور کارهای پیشین نشان می‌دهد بیش‌تر محققان به حل عددی معادله جابه‌جایی-پراکندگی با روش‌های با شبکه‌بندی پرداخته و تحقیقات اندکی به حل معادله انتقال آلاینده در رودخانه با روش‌های بدون شبکه انجام شده است. در سال‌های اخیر روش‌های بدون شبکه در حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل به کار رفته‌اند و نتایج آن حاکی از مناسب بودن این روش عددی در مطالعات علوم مهندسی است. در این تحقیق سعی بر این است به شبیه‌سازی پدیده انتقال با روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین به دلیل دقت بالا، کاهش هزینه مربوط به تولید شبکه و... انجام شود تا نواقص موجود در مدل‌های رایج موجود در زمینه شبیه‌سازی را مرتفع سازد. در نهایت صحت روش مذکور با استفاده از داده‌های واقعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱- روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین

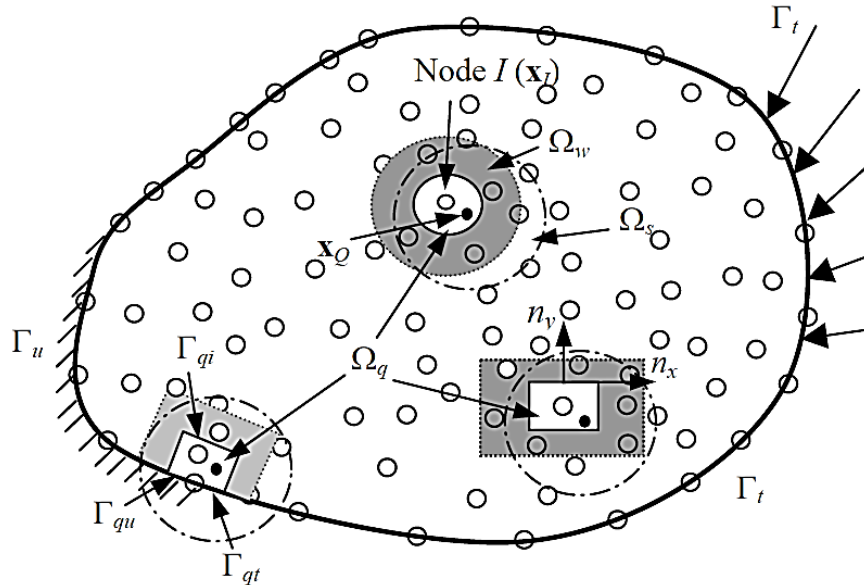
روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین برای تقریب تابع و انتگرال‌گیری به شبکه کلی نیاز ندارد. فرایند کار کاملاً مشابه روش‌های عددی بر اساس فرمول‌بندی شکل قوی مانند تفاضل محدود است. از آنجایی که تقریب حداقل مربعات متحرک در روش مذکور به کار می‌رود، لازم است که روش‌های خاصی برای اعمال شرایط مرزی ضروری به کار گرفته شود (Lin and Atluri, 2000).

روش فوق نسبت به سایر روش‌های عددی دارای مزایایی از جمله: عدم نیاز به شبکه‌بندی زمینه‌ای برای انتگرال‌گیری و حل معادلات بر روی نقاط، و توانایی حل هر گونه هندسه‌ای است.

جریان آب زیرزمینی را در دو حالت ماندگار و غیرماندگار برای آبخوان آزاد دشت بیرجند مدل‌سازی کرده، و سطح آب زیرزمینی مدل‌سازی شده به روش بدون شبکه را با سطح آب زیرزمینی مشاهده شده و روش تفاضل محدود مقایسه نمودند. نتایج تحقیق ایشان گویای عملکرد و دقت قابل قبول این روش است. دیمه‌ور (۱۳۹۶) حل عددی معادلات آب‌های کم‌عمق با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین در حالت غیرماندگار را انجام داد. هدف از تحقیق ایشان، مدل‌سازی عبور جریان آب از روی سرریز سد سیاه‌بیشه بود که در دو حالت با توزیع منظم گره‌ای و توزیع نامنظم گره‌ای انجام شد. نتایج تحقیق حاکی از عملکرد و دقت قابل قبول این روش است. همچنین، مقدار خطای جذر میانگین مربعات در دو حالت بیانگر خطای کمتر در حالت توزیع گره‌های نامنظم است.

(Boddula and Eldho (2017) انتقال آلودگی در محیط متخلخل را با روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین براساس حداقل مربعات متحرک شبیه‌سازی کردند. ایشان به توسعه این روش برای حل مسائل یک و دو بعدی در محیط متلب پرداختند و صحت آن را از نظر دقت و عملکرد با حل تحلیلی و سایر روش‌های عددی موجود (روش تفاضل محدود و اجزای محدود) بررسی کردند. در نهایت به این نتیجه رسیدند که روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین، روشی مؤثر و کارآمد در مدل‌سازی مسائل هیدرولوژی آب‌های زیرزمینی است. (Tayefi et al. (2018) معادله انتشار نوترون به روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین را حل کردند. روند محاسباتی در تحقیق ایشان شامل دو مرحله بود. مرحله اول به کارگیری تقریب حداقل مربعات متحرک برای ساخت تابع شکل بر اساس دامنه مسئله و سپس استفاده از آن در روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین برای حل معادله انتشار نوترون بود. ایشان برای ارزیابی مدل پیشنهادی، چندین مسئله را در نظر گرفتند و خروجی‌ها را با حل‌های تحلیلی و روش اجزای محدود گالرکین مقایسه نمودند. نتایج حاکی از دقت و صحت مناسب روش مذکور بود. همچنین، محقق شد که افزایش گره‌ها و انتخاب تابع وزن مناسب می‌تواند بر عملکرد روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین بیافزاید.

(Pathania and Eldho (2020) شبیه‌سازی بهم‌پیوسته جریان آب زیرزمینی و انتقال آلودگی را در یک آکیفر با روش بدون شبکه گالرکین انجام دادند. ایشان برای تولید تابع شکل، از روش تقریب حداقل مربعات متحرک استفاده کردند که نتیجه آن ایجاد حالت پایدار معادلات برای تخمین هد آب زیرزمینی و مقدار غلظت



شکل ۱- دامنه مسئله به همراه شرایط مرزی ضروری و طبیعی (X_Q : نقطه گوسی، Ω_s : دامنه پایه، Ω_q : دامنه انتگرال گیری، Ω_w : دامنه تابع وزن، Γ_{qi} : مرز داخلی دامنه انتگرال گیری، Γ_{qu} : قسمتی از مرز ضروری، Γ_{qt} : قسمتی از مرز طبیعی) (Liu and Gu, 2005)

تعداد گره‌هایی که به‌طور موضعی برای تخمین مقدار تابع در نقطه X استفاده می‌شود، توسط دامنه پایه تعیین می‌شود. به‌منظور تعیین ضرایب مجهول $a(X)$ ، تابع وزن دار نرم L_2 باید مینیمم شود:

$$J = \sum_I^n W(X - X_I) [P^T(X_I) a(X) - U_I]^2 \quad (4)$$

که $W_i(X)$: نشان‌دهنده تابع وزن مربوط به گره I و مقدار داخل کروشه اختلاف بین مقدار تخمین زده شده در نقطه I و مقدار داده شده در همان نقطه است. هم‌چنین، n : تعداد نقاط در دامنه پایه تابع وزن است. به‌منظور مینیمم کردن تابع J شرط $\partial J / \partial a = 0$ مورد بررسی قرار می‌گیرد که نهایتاً منجر به رابطه خطی (۵) می‌شود.

$$a(X) = A^{-1}(X) B(X) U_s \quad (5)$$

که $A(X)$ ، $B(X)$ و U_s : به‌ترتیب در روابط بعدی تعریف می‌شوند.

$$A(X) = \sum_I^n W(X_I) p(X_I) P^T(X_I) \quad (6)$$

که $A(X)$: ماتریس لنگر وزنی است و ماتریس $B(X)$ از رابطه (۷) محاسبه می‌شود.

$$B(X) = \{W_1 p(x_1) \quad W_2 p(x_2) \quad \dots \quad W_n p(x_n)\} \quad (7)$$

$$U_s = \{U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_n\} \quad (8)$$

با قرار دادن رابطه (۵) در رابطه (۱)، تقریب حداقل مربعات به‌صورت رابطه (۹) ارائه می‌شوند.

۲-۲- تابع تقریب حداقل مربعات متحرک / تابع شکل

این تابع در حدود سال ۱۹۶۰ میلادی توسط شپارد به‌منظور درون‌یابی در سطح برای نقاط با مقادیر متغیر به‌کار رفته است و اساس کاربرد آن دستیابی به تقریب‌های کاملاً پیوسته است (Liu and Gu, 2005) and Belytschko et al. (1994) و Atluri and Zhu (1998) برای ساخت توابع شکل خود به‌ترتیب در روش‌های بدون شبکه گالرکین و روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین از تابع تقریب حداقل مربعات متحرک بهره بردند. اگر $U^h(X)$ یک تابع تغییرات میدانی در محدوده مورد بررسی Ω باشد، تقریب $U^h(X)$ در نقطه X با $U^h(X)$ نشان داده می‌شود که به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود (Liu and Gu, 2005).

$$U^h(X) = \sum_j^m p_j(X) a_j(X) = P^T(X) a(X) \quad (1)$$

که m : تعداد تک جمله‌ای‌های تشکیل‌دهنده $P(X)$ و $a(X)$: بردار ضرایب $P(X)$ است که به‌صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود.

$$a^T(X) = \{a_1(X) \quad a_2(X) \quad \dots \quad a_m(X)\} \quad (2)$$

در رابطه (۱)، $P(X)$ یک بردار از توابع پایه است، که اغلب شامل حداکثر تک جمله‌ای‌های لازم برای حصول حداقل کامل بودن، است. در فضای یک بعدی، یک پایه چندجمله‌ای کامل از مرتبه m طبق (۳) بیان می‌شود.

$$P^T(X) = \{1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^m\} \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} W_j \frac{C^{m+1} - C^m}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Omega} W_j u \frac{\partial C^{m+1}}{\partial x} d\Omega - \int_{\Gamma} D W_j \frac{\partial C^{m+1}}{\partial x} d\Gamma + \int_{\Omega} D \frac{\partial W_j}{\partial x} \frac{\partial C^{m+1}}{\partial x} d\Omega = 0 \quad (13)$$

از آنجایی که توابع شکل حداقل مربعات متحرک، شرط دلتای کرونگر را ارضاء نمی‌کنند، به‌همین دلیل هنگام اعمال شرط مرزی دریکله نیاز به یک ضریب پنالتی (α) است. حال اگر شرایط مرزی دریکله به‌صورت $C - \bar{C} = 0$ فرض شود، جمله رابطه (۱۴) به‌عنوان شرط مرزی ورودی به رابطه (۱۳) اضافه می‌شود.

$$[\alpha W_j (C^{m+1} - \bar{C})] = [\alpha W_j C^{m+1} - \alpha W_j \bar{C}] \quad (14)$$

هم‌چنین شرط مرزی نیومن به‌عنوان شرط مرزی خروجی به‌طور مستقیم اعمال می‌شود. برای مقدار تخمینی غلظت و مشتق آن نسبت به متغیر مستقل مکان داریم:

$$C(x, t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \phi_i(x) \quad (15)$$

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial x} = \sum_{i=1}^n C_i(t) \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \quad (16)$$

با جایگزینی معادلات فوق در رابطه (۱۳) داریم:

$$\left[\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n W_j \phi_i d\Omega + \Delta t u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n W_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega + \Delta t D \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma} W_j \phi_i C_i^{m+1} d\Gamma \right] C_i^{m+1} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n W_j C_i^m d\Omega + \int_{\Gamma} \Delta t D W_j \frac{\partial C}{\partial x} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma} W_j \bar{C} d\Gamma \quad (17)$$

رابطه (۱۷) گسسته‌ترین شکل معادله جابه‌جایی-پراکندگی است که به‌صورت مستقیم داخل کد قرار می‌گیرد و می‌توان آن‌را

$$U^h(X) = \sum_I^n \sum_J^m p_j(X) (A^{-1}(X)B(X))_{jI} U_I = \sum_I^n \phi_I(X) U_I \quad (9)$$

که $U^h(X)$: تابع تقریب، $\phi_I(X)$: تابع شکل و U_I : پارامتر گرهی است (Liu & Gu, 2005).

۲-۳- تابع وزن

تابع وزن نقش اساسی در عملکرد تقریب حداقل مربعات متحرک دارد. در این تحقیق از تابع اسپیلاین کیوبیک W مطابق رابطه (۱۰) استفاده می‌شود. این تابع پیوسته از درجه دو است که d_i : فاصله بین نقطه x_i تا نقطه x و r_w : شعاع تأثیر تابع وزن است (Liu and Gu, 2005).

$$W(X) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3 & \bar{r}_i \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 - \frac{4}{3}\bar{r}_i^3 & 0.5 < \bar{r}_i \leq 0.5 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{d_i}{r_w} = \frac{|x - x_i|}{r_w}$$

۲-۴- گسسته‌سازی معادله جابه‌جایی-پراکندگی

برای پیش‌بینی انتقال آلاینده در رودخانه‌ها، از معادله جابه‌جایی-پراکندگی به شکل رابطه (۱۱) استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (11)$$

که $C(x, t)$: غلظت آلاینده در مجرای اصلی رودخانه، u : سرعت جریان، D : ضریب پراکندگی، t : مدت زمان سپری شده بعد از تخلیه ماده آلاینده و x : فاصله از نقطه تخلیه است (Fischer, 1979). با گسسته‌سازی معادله جابه‌جایی-پراکندگی (رابطه (۱۱))، به‌روش محلی پتروو-گالرکین و باقیمانده‌های وزن‌دار داریم:

$$\int_{\Omega} W_j \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} W_j u \frac{\partial C}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} W_j D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} d\Omega = 0 \quad (12)$$

با جایگذاری عبارت حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء عبارت سوم (از سمت چپ) معادله فوق و با استفاده از تقریب مشتق مرتبه اول جمله زمانی غلظت به روش ضمنی داریم:

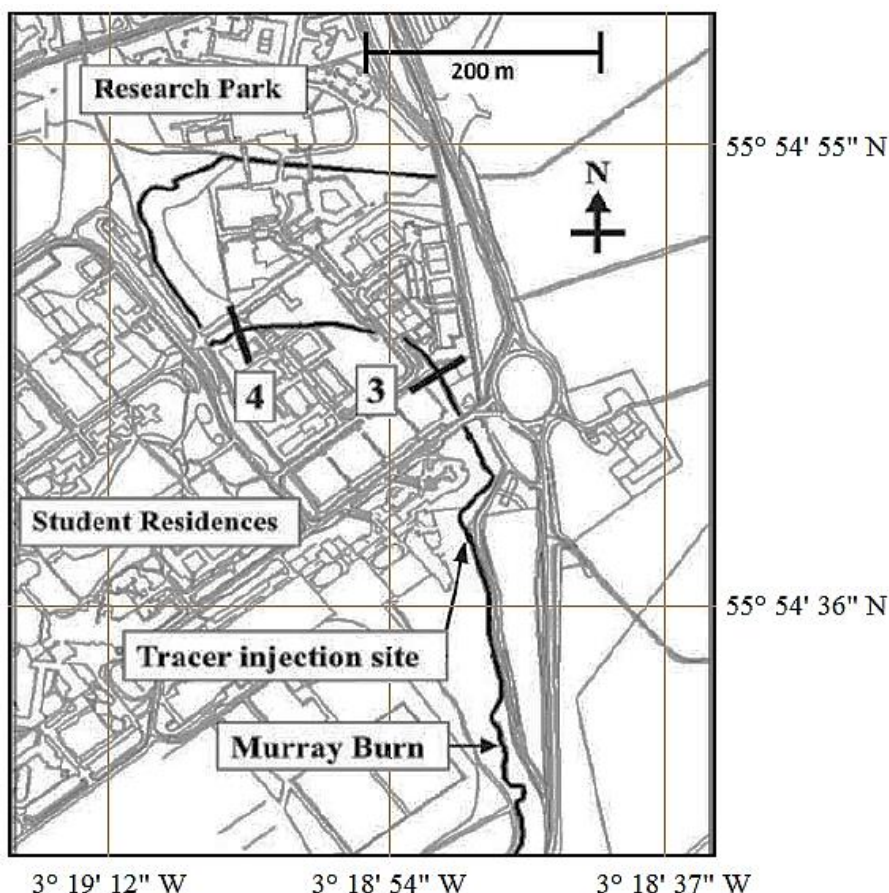
صفر برای شرط اولیه در همه گره‌ها در نظر گرفته شد. آزمایش ماده ردیاب در رودخانه مری‌پرن با تزریق ناگهانی ماده رداین WT در ایستگاه ۱ (۴۲۰ متر بالاتر از ایستگاه ۴) انجام شد. برای انجام مدل‌سازی از داده‌های بالادست (نمودار غلظت-زمان برداشت‌شده در ایستگاه ۳) به‌عنوان شرط مرزی بالادست مدل (ورودی)، و گرادیان مکانی صفر غلظت $\left[\frac{\partial C}{\partial x}(\infty, t) = 0\right]$ برای شرط مرزی پایین‌دست مدل (خروجی) استفاده شد. در نهایت صحت مدل، با داده‌های مشاهداتی پایین‌دست (ایستگاه ۴) بررسی شد. جدول ۱ یازده سری از آزمایش‌های انجام شده بر روی رودخانه مری‌پرن را نشان می‌دهد. محدوده تغییرات دبی در این آزمایشات ۱۲/۹-۴۳۷/۳ لیتر بر ثانیه است.

شکل ۳-الف، نمونه‌ای از توزیع گره‌های به‌کار رفته در این تحقیق (قرمز رنگ) با فواصل مساوی ۱۰ متر و ۴ نقطه گوسی (سبز رنگ) متعلق به هر گره در بازه ۰-۲۰۰ متر از رودخانه مری‌پرن را نشان می‌دهد که در بخش (ب) شکل مذکور، موقعیت دقیق نقاط گوسی متعلق به گره قرار گرفته در $X = 140 \text{ m}$ به‌طور نمونه ارائه شده است.

به شکل $KU = F$ خلاصه کرد، که K : ماتریس سختی، U : ماتریس مجهولات و F : ماتریس نیرو است. در این تحقیق، برای بررسی عملکرد روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین از داده‌های رودخانه مری‌پرن^{۱۱} استفاده می‌شود.

۲-۵- رودخانه مری‌پرن

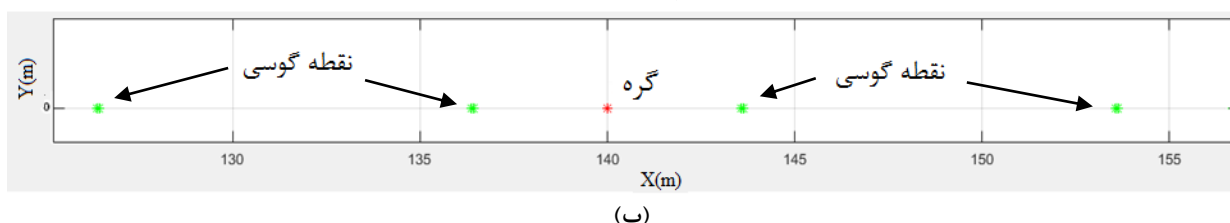
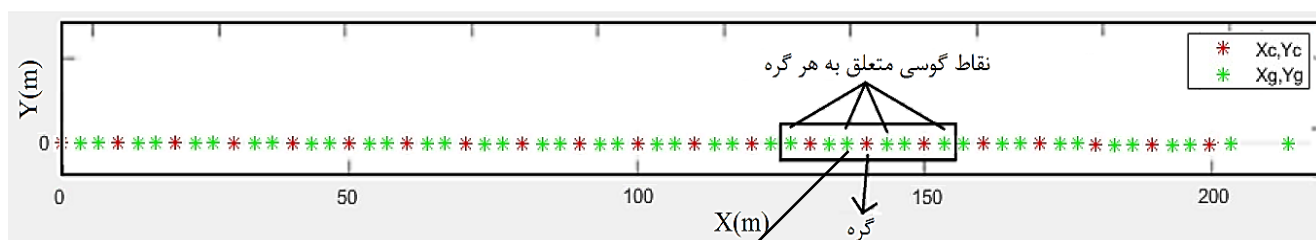
رودخانه مری‌پرن، رودخانه کوچکی است که از محوطه ریکارتون دانشگاه Heriot Watt عبور می‌کند. محوطه دانشگاه در قسمت جنوب غربی ادینبرا و در حدود ۷ مایلی (۱۱/۳ کیلومتری) مرکز شهر واقع شده است. الگوی جریان در بازه مورد مطالعه (بازه ۳ الی ۴) رودخانه مذکور، ماندگار و یکنواخت است. سطح مقطع رودخانه در این بازه تقریباً مستطیلی است و دارای عرض متوسط ۲/۴ متر، شیب متوسط ۰/۰۰۹ و طول ۱۸۴ متر است. شکل ۲، شماتیک رودخانه مری‌پرن، محل تزریق ماده ردیاب و بازه موردنظر را نشان می‌دهد (Wallis et al. 2014). از آنجایی که در شروع شبیه‌سازی و قبل از تزریق، آب رودخانه تمیز و عاری از هرگونه آلاینده بوده است، غلظت پایه



شکل ۲- نمای شماتیک رودخانه مری‌پرن واقع در کشور اسکاتلند (Wallis et al. 2014)

جدول ۱- لیست آزمایش‌ها (Wallis et al. 2014)

شماره آزمایش	تاریخ انجام آزمایش (dd/mm/yy)	جرم ماده ردیاب (g)	دبی جریان (Lit/s)	شماره آزمایش	تاریخ انجام آزمایش (dd/mm/yy)	جرم ماده ردیاب (g)	دبی جریان (Lit/s)
۳	۲۰۰۹/۱۱/۰۴	۰/۱۰۰	۱۳۷	۹	۲۰۱۰/۰۶/۱۷	۰/۰۵۰	۳۶
۴	۲۰۰۹/۱۱/۱۱	۰/۰۵۰	۸۳/۲	۱۰	۲۰۱۰/۰۷/۰۸	۰/۰۵۰	۱۲/۹
۵	۲۰۰۹/۱۱/۱۸	۰/۱۰۰	۹۵/۱	۱۱	۲۰۱۰/۱۱/۰۳	۰/۱۵۰	۱۳۴/۸
۶	۲۰۰۹/۱۱/۲۶	۰/۲۰۰	۳۷۹/۵	۱۲	۲۰۱۱/۰۲/۰۸	۰/۳۰۰	۴۳۷/۳
۷	۲۰۰۹/۱۱/۱۸	۰/۱۰۰	۳۸/۱	۱۳	۲۰۱۱/۰۲/۱۵	۰/۱۵۰	۱۴۴
۸	۲۰۱۰/۰۵/۲۷	۰/۰۷۵	۴۱/۳				



شکل ۲- نمونه‌ای از گرهِ‌های موردنظر با فواصل مساوی ۱۰ متر و ۴ نقطه گوسی (سبز رنگ) متعلق به هر گرهِ در بازه رودخانه مری‌پرن

۶-۲- معیارهای ارزیابی عملکرد مدل

در این تحقیق برای ارزیابی پارامترهای برآورد شده برای شبیه‌سازی غلظت ماده ردیاب در ایستگاه ۴، از معیار ارزیابی میانگین مربعات خطا (MSE^{12}) استفاده شد (Wackerly et al., 2014). رابطه میانگین مربعات خطا به صورت رابطه (۱۸) است و n_t به ترتیب غلظت محاسباتی، غلظت مشاهداتی و تعداد داده‌ها است.

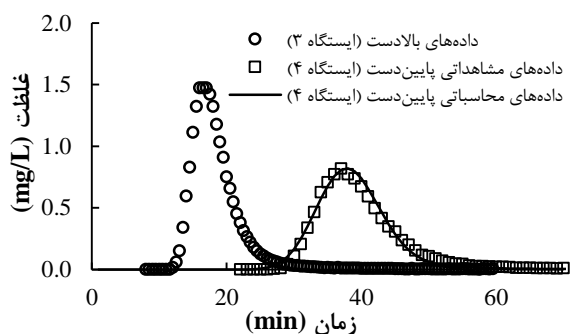
$$MSE = \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} (C_{calc} - C_{obs})^2 \quad (18)$$

۳- نتایج و بحث

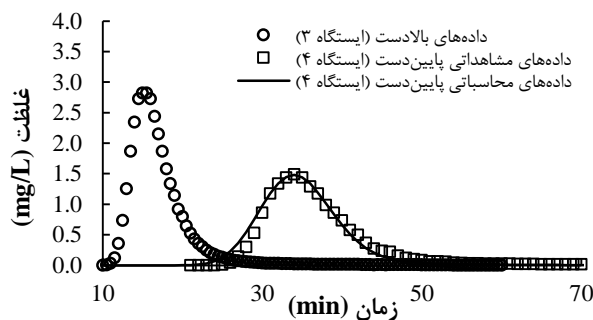
۱-۳- واسنجی مدل

برای واسنجی مدل به روش محلی پتروو-گالرکین، از ۹ آزمایش ارائه شده در جدول ۲ استفاده شد. در این روش، دو پارامتر سرعت و ضریب پراکندگی با کاهش مقدار میانگین مربعات خطا بین داده‌های مشاهداتی و محاسباتی در همه آزمایش‌ها بهینه شدند.

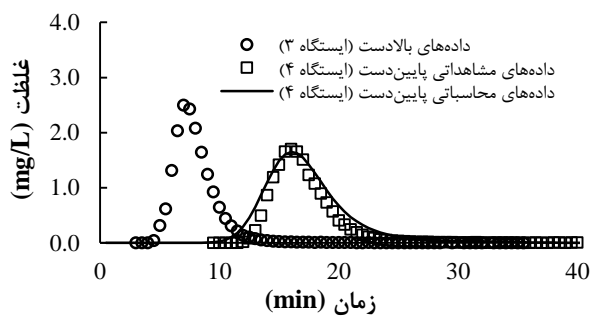
در ابتدا بهینه‌سازی برای سرعت (برای قرارگیری منحنی غلظت-زمان در محدوده زمانی مناسب) و سپس ضریب پراکندگی (برای به دست آوردن ارتفاع و شکل مناسب پروفیل) انجام شد، در نهایت تغییرات کوچکی بر هر دو پارامتر برای دستیابی به بهترین شکل منحنی غلظت-زمان اعمال شد. در شکل ۴ منحنی غلظت-زمان به دست آمده با روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین در تمامی آزمایش‌ها نشان داده شده است. با توجه به نتایج به دست آمده از روش مذکور، مقدار غلظت محاسباتی در پروفیل پایین دست (ایستگاه ۴)، دارای هم‌خوانی بهتری با داده‌های مشاهداتی در دبی‌های پایین‌تر است. همان‌طور که مشخص است مقادیر غلظت محاسباتی نسبت به مشاهداتی در شاخه بالارونده‌ی این پروفیل، اندکی بیشتر و در شاخه پایین‌رونده کم‌تر برآورد شده است. در صورتی‌که، در دبی‌های بالا (آزمایش‌های شماره ۶، ۱۲ و ۱۳)، در هر دو شاخه بالا رونده و پایین‌رونده، مقدار غلظت بیشتر برآورد شده است. مقایسه حداکثر مقدار غلظت محاسباتی و مشاهداتی نشان داد که مقدار خطای زمانی که غلظت در حالت حداکثر خود قرار دارد، به‌طور متوسط بین ۱۰-۰/۱ درصد است که این مقدار برای دبی‌های بالا، بیشتر است.



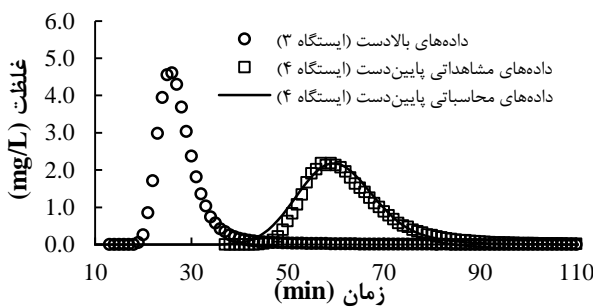
آزمایش شماره ۴ (دبی ۸۳/۲ لیتر بر ثانیه)



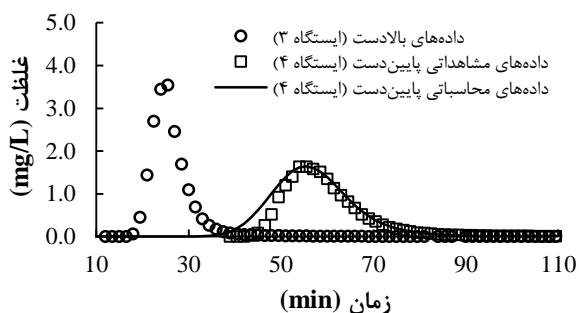
آزمایش شماره ۵ (دبی ۹۵/۱ لیتر بر ثانیه)



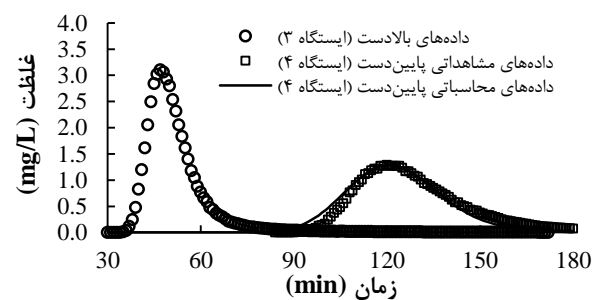
آزمایش شماره ۶ (دبی ۳۷۹/۵ لیتر بر ثانیه)



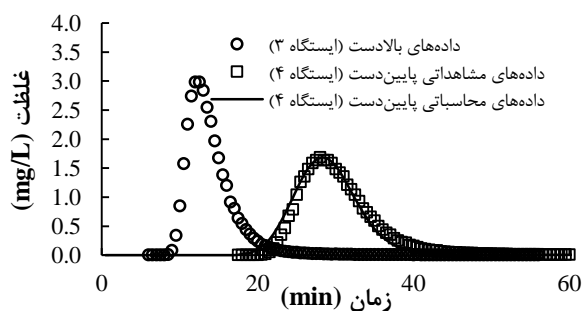
آزمایش شماره ۷ (دبی ۳۸/۱ لیتر بر ثانیه)



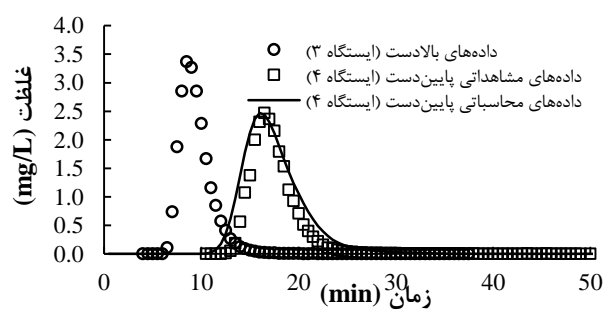
آزمایش شماره ۸ (دبی ۴۱/۳ لیتر بر ثانیه)



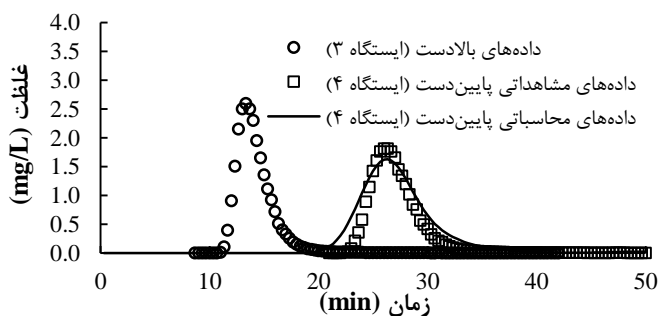
آزمایش شماره ۱۰ (دبی ۱۲/۹ لیتر بر ثانیه)



آزمایش شماره ۱۱ (دبی ۱۳۴/۸ لیتر بر ثانیه)



آزمایش شماره ۱۲ (دبی ۴۳۷/۳ لیتر بر ثانیه)



آزمایش شماره ۱۳ (دبی ۱۴۴ لیتر بر ثانیه)

شکل ۴- نمودار غلظت-زمان در ۹ آزمایش برای واسنجی مدل

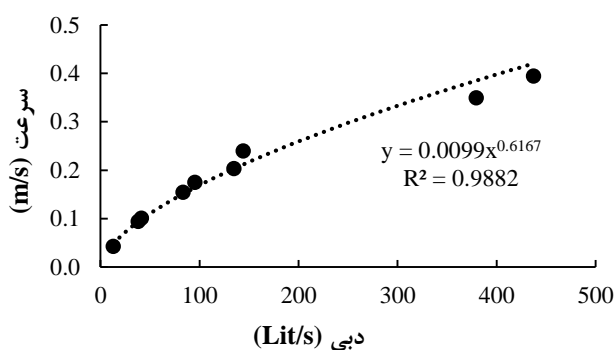
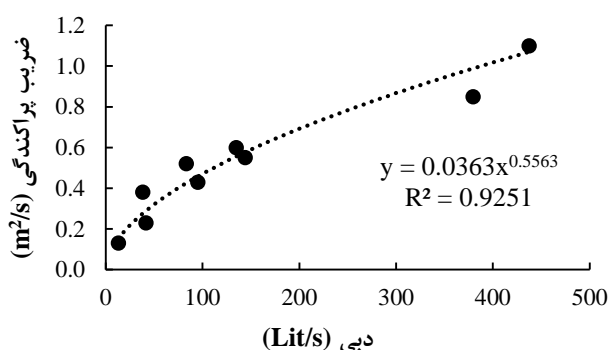
دبی‌های پایین، روش MLPG دارای دقت بالاتری نسبت به روش Fischer است و مقادیر آن به روش روندیابی Singh and Beck نزدیک است، ولی در دبی‌های بالا دارای دقت پایین‌تری نسبت به دو روش اشاره شده است. در جدول مذکور فاصله زمانی، فاصله گره‌ها و تعداد گره‌های به کار رفته در هر آزمایش ارائه شده است. فواصل گره‌ها به نحوی انتخاب شده تا شرط پایداری عدد کورانت برقرار باشد.

ضریب پراکندگی و سرعت تمامی آزمایش‌ها نسبت به دبی رسم شد (شکل ۵) و معادله رگرسیون توانی بین متغیرها استخراج شد که دارای ضریب همبستگی ۰/۹۲۵ و ۰/۹۸۸ به ترتیب برای ضریب پراکندگی و سرعت هستند. همان‌طور که شکل ۵ نشان می‌دهد مقدار این دو پارامتر با افزایش دبی، افزایش می‌یابد، با این تفاوت که داده‌های سرعت دارای همبستگی بالاتری نسبت به ضریب پراکندگی هستند.

در جدول ۲ مقادیر سرعت و ضریب پراکندگی بهینه شده برای ۹ آزمایش ارائه و مقدار میانگین مربعات خطا محاسبه شده است. ضریب پراکندگی در این تحقیق در محدوده ۰/۱۳-۱/۱ مترمربع بر ثانیه به دست آمد که این مقادیر برای رودخانه‌های کوچک صادق است. مقادیر پایین میانگین مربعات خطا در دبی‌های کم، بیانگر این است که روش بدون شبکه پتروو-گالرکین قادر به برآورد بهتری نسبت به دبی‌های بالاتر است که نتایج آن به وضوح در شکل ۱ مشاهده شد. نتایج این پژوهش با تحقیق Wallis et al. (2014) که به حل معادله جابه‌جایی-پراکندگی به دو روش روندیابی Fischer و Singh and Beck در رودخانه مری‌پرن پرداخته، مقایسه شد. مقدار میانگین مربعات خطا در روش‌های مذکور به دو ستون آخر جدول ۲ ارائه شده است. مقایسه مقادیر MSE به دست آمده از روش ارائه شده در این پژوهش و تحقیق Wallis et al. (2014)، نشان می‌دهد که در

جدول ۲- نتایج واسنجی

شماره آزمایش	دبی جریان (Lit/s)	فاصله زمانی (Δt) (s)	فاصله گره‌ها (Δx) (m)	تعداد گره‌ها	سرعت (m/s)	ضریب پراکندگی (m^2/s)	میانگین مربعات خطا تحقیق حاضر (MSE) ($\mu g/L$) ²	میانگین مربعات خطا روش روندیابی Fischer (MSE) ($\mu g/L$) ²	میانگین مربعات خطا روش روندیابی Singh & Beck (MSE) ($\mu g/L$) ²
۴	۸۳/۲	۳۰	۱۰	۲۰	۰/۱۵۵	۰/۵۲	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۰۷
۵	۹۵/۱	۳۰	۱۰	۲۰	۰/۱۷۵	۰/۴۳	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۶۸	۰/۰۰۲۷
۶	۳۷۹/۵	۳۰	۱۰	۲۰	۰/۳۵۰	۰/۸۵	۰/۰۱۵۱	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۵۸
۷	۳۸/۱	۶۰	۱۲	۱۷	۰/۰۹۵	۰/۳۸	۰/۰۱۲۸	۰/۰۲۰۸	۰/۰۰۶۴
۸	۴۱/۳	۹۰	۱۳	۱۶	۰/۱۰۱	۰/۲۳	۰/۰۱۶۰	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۵۷
۱۰	۱۲/۹	۶۰	۶	۳۲	۰/۰۴۳	۰/۱۳	۰/۰۰۴۲	۰/۰۱۵۰	۰/۰۰۵۵
۱۱	۱۳۴/۸	۳۰	۱۱	۱۸	۰/۲۰۴	۰/۶۰	۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۳۰
۱۲	۴۳۷/۳	۳۰	۱۳	۱۶	۰/۳۹۵	۱/۱۰	۰/۰۴۲۶	۰/۰۰۵۵	۰/۰۰۴۰
۱۳	۱۴۴	۲۰	۱۰	۲۰	۰/۲۴۰	۰/۵۵	۰/۰۲۲۷	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۱۷



شکل ۵- نمودار ضریب پراکندگی و سرعت نسبت به دبی

آزمایش شماره ۹ با دبی ۳۳ لیتر بر ثانیه) با استفاده از معادله رگرسیون توانی مستخرج از شکل ۵ تخمین زده شد و در نهایت منحنی غلظت- زمان داده‌های پایین‌دست (ایستگاه ۴) برای

۲-۳- اعتبارسنجی مدل

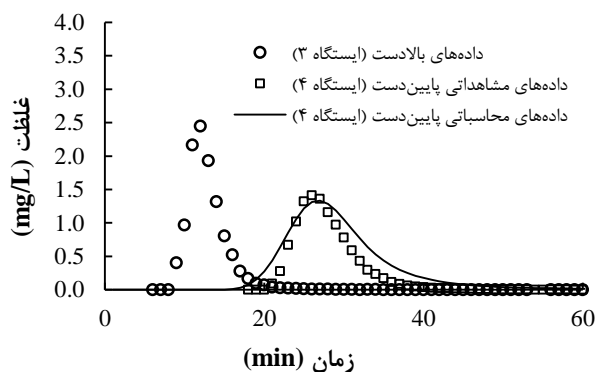
مقادیر ضریب پراکندگی و سرعت، برای اعتبارسنجی دو آزمایش دیگر (آزمایش شماره ۳ با دبی ۱۳۷ لیتر بر ثانیه و

۲ و ۶ درصد به ترتیب در آزمایش‌های شماره ۳ و ۹ است. با مقایسه دو آزمایش می‌توان دریافت که دقت مدل در دبی کمتر، بالاتر است. مقدار MSE در روش MLPG نسبت به روش‌های ارائه شده در (Wallis et al. (2014) دارای مقادیر کمتری است که حاکی از عملکرد مناسب این روش است.

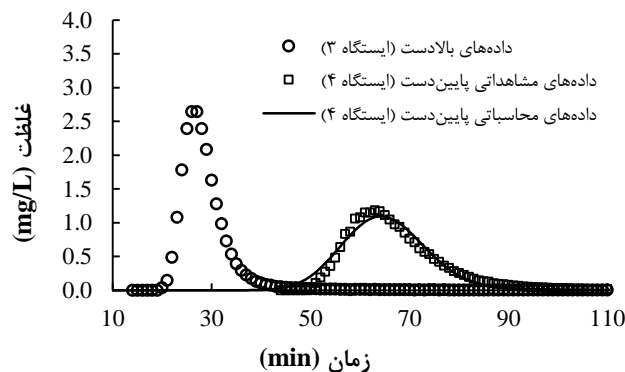
آزمایشات مذکور با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین پیش‌بینی شد. نتایج اجرای دو آزمایش در جدول ۳ و منحنی غلظت-زمان پیش‌بینی شده در شکل ۶ ارائه شده است. مطابق شکل، پروفیل غلظت محاسباتی، پایین‌تر از پروفیل غلظت مشاهداتی قرار گرفته که این مقدار خطا در غلظت حداکثر برابر

جدول ۳- آزمایش‌های اعتبارسنجی

میانگین مربعات خطا (MSE) روش روندیابی Singh & Beck ($\mu\text{g/L}^2$)	میانگین مربعات خطا (MSE) روش روندیابی Fischer ($\mu\text{g/L}^2$)	میانگین مربعات خطا (MSE) تحقیق حاضر ($\mu\text{g/L}^2$)	ضریب پراکندگی (m^2/s)	سرعت (m/s)	تعداد گره‌ها	فاصله گره‌ها (Δx) (m)	فاصله زمانی (Δt) (s)	دبی جریان (Lit/s)	شماره آزمایش
۰/۰۴۶۹	۰/۰۳۹۰	۰/۰۲۲۷	۰/۵۶	۰/۲۰۶	۱۵	۱۴	۶۰	۱۳۷	۳
۰/۰۱۲۸	۰/۰۵۱۰	۰/۰۰۲۵	۰/۲۵	۰/۰۸۶	۲۰	۱۰	۶۰	۳۳	۹



آزمایش شماره ۳ (دبی ۱۳۷ لیتر بر ثانیه)



آزمایش شماره ۹ (دبی ۳۳ لیتر بر ثانیه)

شکل ۶- منحنی غلظت-زمان در ۲ آزمایش برای اعتبارسنجی مدل

در دبی‌های بالا، در هر دو شاخه بالا رونده و پایین‌رونده، مقدار غلظت محاسباتی بیشتر از مشاهداتی برآورد شده است. مقایسه حداکثر مقدار غلظت محاسباتی و مشاهداتی نشان داد که مقدار خطا زمانی که غلظت در حالت حداکثر خود قرار دارد، به‌طور متوسط بین ۱/۰-۱ درصد برای حالت واسنجی و ۲-۶ درصد برای حالت اعتبارسنجی است. در نهایت نمودار ضریب پراکندگی و سرعت نسبت به دبی رسم و معادله رگرسیونی توانی استخراج شد که به ترتیب دارای ضریب همبستگی ۰/۹۲۵ و ۰/۹۸۸ برای ضریب پراکندگی و سرعت هستند. دو آزمایش دیگر نیز در اعتبارسنجی مدل برای تخمین ضریب پراکندگی و سرعت به کار برده شد که مقدار پایین MSE در آن‌ها، بیانگر عملکرد و دقت قابل قبول روش MLPG در حل معادله جابه‌جایی-پراکندگی است. با مقایسه روش به کار برده شده با سایر روش‌ها می‌توان دریافت که روش مورد استفاده در این تحقیق و روش روندیابی Singh and Beck در دبی‌های پایین، نسبت به روش Fischer دارای دقت بالاتر است.

۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق معادله جابه‌جایی-پراکندگی با روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین حل و برای مدل‌سازی از داده‌های رودخانه مری‌پرن استفاده شد. رودخانه مذکور در بازه ۳-۴ دارای جریان یکنواخت و ماندگار است که برای انجام مدل‌سازی، از داده‌های ایستگاه ۳ به‌عنوان شرط مرزی ورودی استفاده و در نهایت صحت مدل، با داده‌های مشاهداتی ایستگاه ۴ بررسی شد. از مجموع ۱۱ آزمایش انجام گرفته، ۹ آزمایش برای واسنجی استفاده شد که در آن ضریب پراکندگی و سرعت با به حداقل رساندن معیار میانگین مربعات خطای غلظت محاسباتی و مشاهداتی برای تمام حالات بهینه شدند. ضریب پراکندگی در این تحقیق در محدوده ۱/۱-۰/۱۳ مترمربع بر ثانیه به دست آمد. نتایج مدل‌سازی نشان داد که مدل MLPG برای دبی‌های کمتر، مقدار غلظت محاسباتی را در شاخه بالا رونده و پایین‌رونده به ترتیب بیشتر و کم‌تر از داده‌های مشاهداتی برآورد می‌کند. در صورتی که

۵- قدردانی

بدین‌وسیله از همکاری پروفیسور والیس برای ارسال داده‌های آزمایش غلظت در رودخانه مری‌پرن تشکر و قدردانی می‌شود.

۶- پی‌نوشت‌ها

- 1- Fick's First Law
- 2- Finite Difference Method (FDM)
- 3- Finite Element Method (FEM)
- 4- Finite Volume Method (FVM)
- 5- Meshfree Local Petrov-Galerkin
- 6- Moving Least Squares
- 7- Element Free Galerkin Method (EFGM)
- 8- Localized Radial Basis Functions' (LRBF)
- 9- Method of Approximate Particular Solutions (MAPS)
- 10- Localization technique of Method of Approximate Particular Solutions (LMAPS)
- 11- Murray Burn
- 12- Mean Square Error

۷- مراجع

- براتی مقدم، م.، مظاهری، م.، و محمد ولی سامانی، ج.، (۱۳۹۴)، "مدل یک بعدی انتقال آلاینده در رودخانه‌های طبیعی با تأکید بر نقش نواحی نگهداشت"، *مجله مدیریت آب و آبیاری*، ۲(۵)، ۱۶۹-۱۹۰.
- دیمه‌ور، س.، (۱۳۹۶)، "حل عددی معادلات آب‌های کم‌عمق با استفاده از روش بدون شبکه پتروو-گالرکین"، پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد عمران-منابع آب، دانشگاه بیرجند، خراسان جنوبی، ایران.
- محتشمی، ع.، (۱۳۹۵)، "استفاده از روش بدون شبکه در مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد"، پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد عمران-منابع آب، دانشگاه بیرجند، خراسان جنوبی، ایران.
- مشهدگره، ن.، محمد ولی سامانی، ج.، و مظاهری، م.، (۱۳۹۲)، "حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی به‌ازای الگوی زمانی دلخواه منابع آلاینده نقطه‌ای توسط روش تابع گرین"، *مجله هیدرولیک*، ۸(۴)، ۱۳-۲۵.
- Atluri, S.N., and Zhu, T.A., (1998), "A new meshless method (MLPG) approach in computational mechanics", *Journal of Computational Mechanics*, 22(2), 117-127.
- Belytschko, T., Gu, L. and Lu, Y., (1994), "Fracture and crack growth by element free Galerkin methods", *Journal of Modelling and Simulation in Materials*

- Science and Engineering*, 2(3A), 519-534.
- Boddula, S. and Eldho, T.I., (2017), "A moving least squares based meshless local petrov-galerkin method for the simulation of contaminant transport in porous media", *Journal of Engineering Analysis with Boundary Elements*, 78, 8-19.
- Chapra, S.C., (1997), *Surface water-quality modeling*, Vol. 1, McGraw-Hill New York.
- Fischer, H.B. (1979), *Mixing inland and coastal waters*, Academic Press.
- Kolahdoozan, M., and Gargary, S.F., (2015), "Solving the one dimensional advection diffusion equation using mixed discrete least squares meshless method", *Proceedings of the International Conference on Civil, Structural and Transportation Engineering*, Ottawa, Ontario, Canada, pp. 292(1)- 292(8).
- Li, J., Chen, Y., and Pepper, D., (2003), "Radial basis function method for 1-D and 2-D groundwater contaminant transport modeling", *Journal of Computational Mechanics*, 32(1), 10-15.
- Lin, H., and Atluri, S.N., (2000), "Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for convection diffusion problems", *Computer Modelling in Engineering & Sciences (CMES)*, 1(2), 45-60.
- Liu, G.-R. (2002), *Mesh free methods: Moving beyond the finite element method*, CRC press. New York Washington, D.C.
- Liu, G.-R. and Gu, Y.T., (2005), *An introduction to meshfree methods and their programming*, Springer Science and Business Media, New York, Heidelberg.
- Mousavi, S., Young, D., and Tsai, C., (2016), "Comparison of localized radial basis functions' (LRBF) solution of the two-dimensional advection-diffusion equation to the finite difference methods' (FDM)", *Proceedings of 12th International Conference on Hydrosience and Engineering*. Tainan, Taiwan.
- Pathania, T. and Eldho, T.I., (2020), "A moving least squares based meshless element-free Galerkin method for the coupled simulation of groundwater flow and contaminant transport in an aquifer", *Journal of Water Resources Management*, 34(15), 4773-4794.
- Tayefi, Sh., Pazirandeh, A., and Kheradmand Saadi, M., (2018), "A meshless local Petrov-Galerkin method for solving the neutron diffusion equation", *Journal of Nuclear Science and Techniques*, 29(169), 1-19.
- Wackerly, D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R.L., (2014), *Mathematical statistics with applications*, Cengage Learning.
- Wallis, S.G., Bonardi, D., and Silavwe, D.D., (2014), "Solute transport routing in a small stream", *Hydrological Sciences Journal*, 59(10), 1894-1907.



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC-BY) license.